Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Feuille 2 - Méthodes à la Fourier

Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$.

Dans les exercices qui suivent, on s'intéresse à la résolution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et f est donnée.

Exercice 1. (*Raisonnement formel*)
On commence par un raisonnement formel pour deviner la forme de la solution, on justifiera le résultat dans l'exercice suivant.

Pour u solution de (1), on définit la transformée de Fourier (partielle) de u par rapport à la variable d'espace x :

$$\hat{u}(t,\xi) = (\mathscr{F}_x u)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(t,x)dx \quad \forall t \geq 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.
2. En déduire $\hat{u}(t,\xi)$ pour tout $t \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire la forme de la solution u de (1).

Exercice 2. (*Solution de l'équation de la chaleur*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$K(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$

où $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ est la norme euclidienne de x.

1. *Propriétés de K.*
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x)dx = 1$ pour tout $t > 0$.
   (b) Montrer que K est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ et calculer $\partial_t K(t,x) - \Delta_x K(t,x)$ pour tout $t > 0$, tout $x \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Soit L un compact de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ un multi-indice. Montrer qu'il existe deux constantes C et $\delta > 0$ (dépendant de L et α) telles que : pour tout $(t,x) \in L$, tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\partial^\alpha_{(t,x)} K(t,x-y)| \leq C e^{-\delta|y|^2}.$$

2. Soit $p \in [1, \infty]$. On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(t,x) = \begin{cases} \big(K(t,\cdot) *_x f\big)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(t, x-y) f(y) dy, & \forall t > 0 \\ f(x) & t = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(a) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ et que $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que si $p < \infty$, alors $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t, \cdot) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(c) Montrer que si $p = \infty$ et si $f \in L^\infty$ est de plus uniformément continue, alors $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t, \cdot) = f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(d) Montrer que si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$, alors $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t, \cdot) = f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. (*Solution fondamentale de l'équation de la chaleur*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$E(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)} \, \mathbf{1}_{\{t>0\}}$$

où $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ est la norme euclidienne de x.

Montrer que E est solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$.

Equation des ondes en une dimension d'espace.

Dans les exercices qui suivent, on s'intéresse à la résolution de l'équation des ondes 1D

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) - \partial_{xx}^2 u(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(0,x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

où f et g sont données.

Exercice 4. (*Raisonnement formel*)

On commence par un raisonnement formel pour deviner la forme de la solution, on justifiera le résultat dans l'exercice suivant.

Pour u solution de (3), on définit la transformée de Fourier (partielle) de u par rapport à la variable d'espace x :

$$\hat{u}(t,\xi) = (\mathscr{F}_x u)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t,x) dx \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

1. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2. En déduire $\hat{u}(t,\xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \cos(t\xi)$. Montrer que $\varphi_t \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ et que (au sens des distributions)

$$\mathscr{F}^{-1}(\cos(t\xi)) = \frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t}).$$

4. En déduire la forme de la solution u de (3).

Exercice 5. (*Solution de l'équation des ondes en dimension 1 d'espace*)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On définit pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(f(x+t) + f(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy.$$

Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et que u vérifie (3).

Exercice 6. (*Solution fondamentale de l'équation des ondes en dimension 1 d'espace*)
Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ par

$$E(t,x) = \frac{1}{2}H(t - |x|) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t > |x| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$.