SOLUTION FONDAMENTALE

MOTIVATION

Calcul formel basé sur $\mathcal{F}$:

On se donne f, on cherche u

tq

$$P(\partial)\, u = f$$

notation compacte pour une EDP linéaire à coeff. constants

Exemples :

- Chaleur : $\partial_t - \Delta_x = P(\partial)$

$$P(\partial) u = \partial_t u - \Delta_x u$$

Symbole : $t - x_1^2 - \dots - x_n^2 =$
$t - |x|^2 = P(x,t)$

- Laplace $\Delta = P(\partial)$
  Symbole $x_1^2 + \dots + x_n^2 = |x|^2 = P(x)$

- Schrödinger $i\partial_t + \Delta_x u = P(\partial)$
  Symbole $it + x_1^2 + \dots + x_n^2 =$
  $it + |x|^2 = P(x,t)$

- Ondes $\partial_t^2 - \Delta_x = P(\partial)$
  Symbole $t^2 - |x|^2 = P(x,t)$

Retour à la résolution de

$$P(\partial)\, u = f$$

"$\Longrightarrow$" $P(i\xi)\,\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$

"$\Longrightarrow$" $\hat{u}(\xi) = \dfrac{1}{P(i\xi)}\,\hat{f}(\xi)$ "$\Longrightarrow$"

"$\Longrightarrow$" $u = K * f$, où $\hat{K}(\xi) = \dfrac{1}{P(i\xi)}$.

<u>Définition.</u> Soit $P(\partial)$ un opérateur linéaire à coefficients constants.

$E \in L^1_{loc}$ est **solution fondamentale** (ou **solution élémentaire**)

notation consacrée pour le K ci-dessus

de $P(\partial)$ si :

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u := E * f$$

est solution (classique) de

$$P(\partial) u = f.$$

<u>Proposition.</u> E solution fondamentale $\Longleftrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(-x)\,\big(P(\partial)\varphi(x)\big)dx = \varphi(0),\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

<u>Preuve:</u> "$\Longrightarrow$" $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;

$$f = P(\partial)[\underset{\in L^1_{loc}}{\underset{\uparrow}{E}} * \underset{\in C_c^\infty}{\underset{\uparrow}{f}}] = E * \big(P(\partial)f\big) =$$

$$\int E(\cdot - x)\, P(\partial)f(x)\,dx \quad \Longrightarrow$$

$$\int E(-x)\, P(\partial)f(x)\,dx = f(0). \quad \square$$

"$\Longleftarrow$" $\varphi(x) = f(y+x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, y fixé

$f \in C_c^\infty \Longrightarrow \varphi \in C_c^\infty \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ f(y)}}{\varphi(y)} = \int E(-x)\, P(\partial)\varphi(x)\,dx$$

$$= \int E(-x)\,(P_x\partial)(f(x+y))\,dx =$$

$$= \int E(-x)\,(P(\partial)f)(x+y)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x \to -x}}{=}$$

$$(E * P(\partial)f)(x) = P(\partial)\,u(x). \qquad \square$$

FORMULES INTEGRALES
MESURE SUPERFICIELLE

Dans $\mathbb{R}$: 2 formules fondamentales

Leibniz-Newton $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

$\Downarrow$

IPP $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$

Dans 2+ dimensions:

Leibniz-Newton + Fubini

$\rightsquigarrow$

Thm flux-divergence

(formule de Gauss-Ostrogradskii)

IPP + Fubini

$\rightsquigarrow$

IPP

$\boxed{\text{Thm flux-divergence}}$

(hypothèses précises plus tard)

$$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F \, d\sigma$$

divergence du champ de vecteurs F

normale extérieure à Ω

mesure "superficielle"

Points à clarifier :

- hypothèses sur F
- —— " —————— Ω
- comment calculer ν
- —— " ———————— $\int_{\partial\Omega} \dots \, d\sigma$

Thm flux-divergence

Hyp.

$F \in C^1(\overline{\Omega})$

Ω Lipschitz

+(HC)

plus tard

Concl.

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F \, d\sigma}$$

$\boxed{(Hc)}$: hypothèse de compacité :

au moins l'un des objets considérés est à support compact.

<u>Exemples:</u>

- thm flux-divergence : Ω rel$^{\underline{nt}}$ compact ou $F \in C^1_c(\Omega)$
- IPP : Ω rel$^{\underline{nt}}$ compact ou $f \in C^1_c(\Omega)$ ou $g \in C^1_c(\Omega)$
- Formules de Green : — " —

$\boxed{C^1(\overline{\Omega})}$: dans $\mathbb{R}$, $f \in C^1([a,b])$

$\Longleftrightarrow$ $f \in C^1((a,b))$ et f' se prolonge par continuité en a et b.

Dans $\mathbb{R}^n$, si Ω quelconque → situation plus compliquée. Mais...

$\boxed{\underline{\text{Thm (Whitney)}}}$ (voir Hörmander, Thm 2.3.6, p. 48)

Hyp. Ω Lipschitz

Concl. Si $f \in C^1(\Omega)$, on a équivalence entre :

(i) f et ∇f se prolongent par continuité à $\overline{\Omega}$

(ii) $\underline{\exists\ \tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)}$ tq $\tilde{f}|_\Omega = f$.

<u>Déf.</u> Si (i) ou (ii), alors

$$f \in C^1(\overline{\Omega})$$

$\boxed{\Omega \text{ Lipschitz}}$ (de même $\Omega \in C^1$, C^2, etc.)

Intuitivement : $\Omega \in$ "classe" $\Longleftrightarrow$ $\partial\Omega \in$ "classe" et Ω est <u>d'un seul côté de $\partial\Omega$</u>

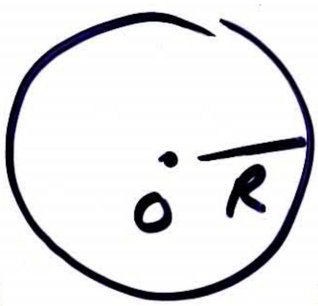
<u>Exemples:</u>

- $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$

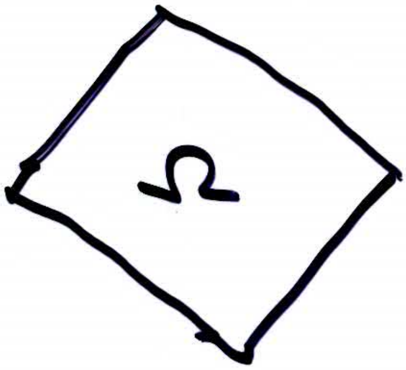
$\partial\Omega = \mathbb{R}$ est C^∞, mais Ω est des deux côtés de $\partial\Omega$

Donc $\Omega \notin C^\infty$

- $\Omega = B(0, R)$ et $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ sont C^∞

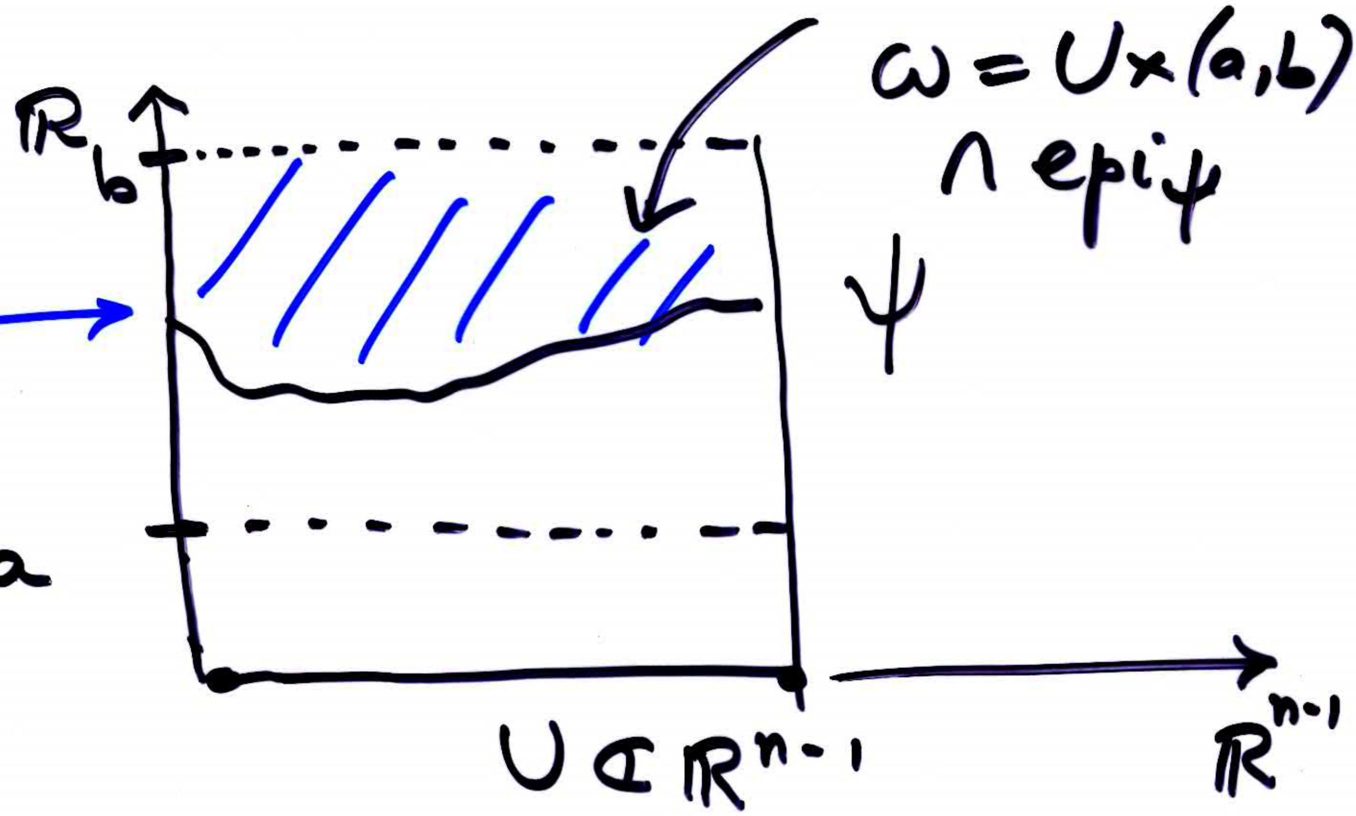


•



$\Omega \in \mathrm{Lip}$, mais $\Omega \notin C^1$

Domaine spécial :



domaine spécial

Données : $U \Subset \mathbb{R}^{n-1}$

$$(a,b) \subset \mathbb{R}$$

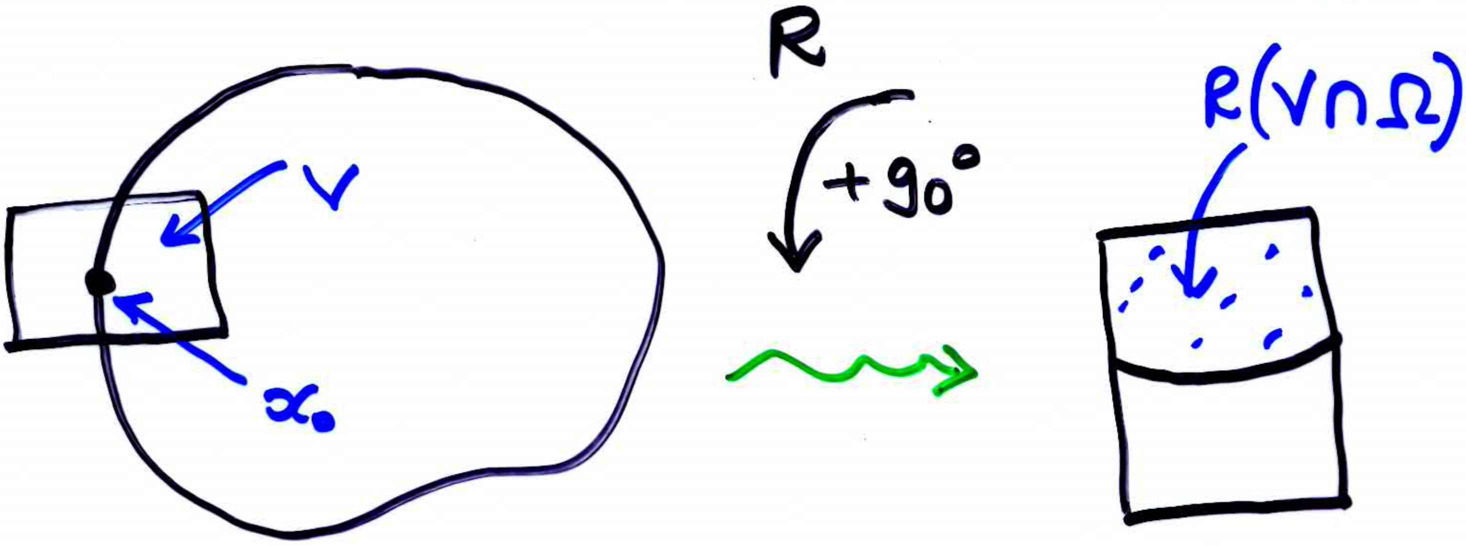
$$\psi : U \to (a,b)$$

<u>Déf.</u> : Si $\psi \in$ classe, alors ω est un domaine spécial $\in$ classe

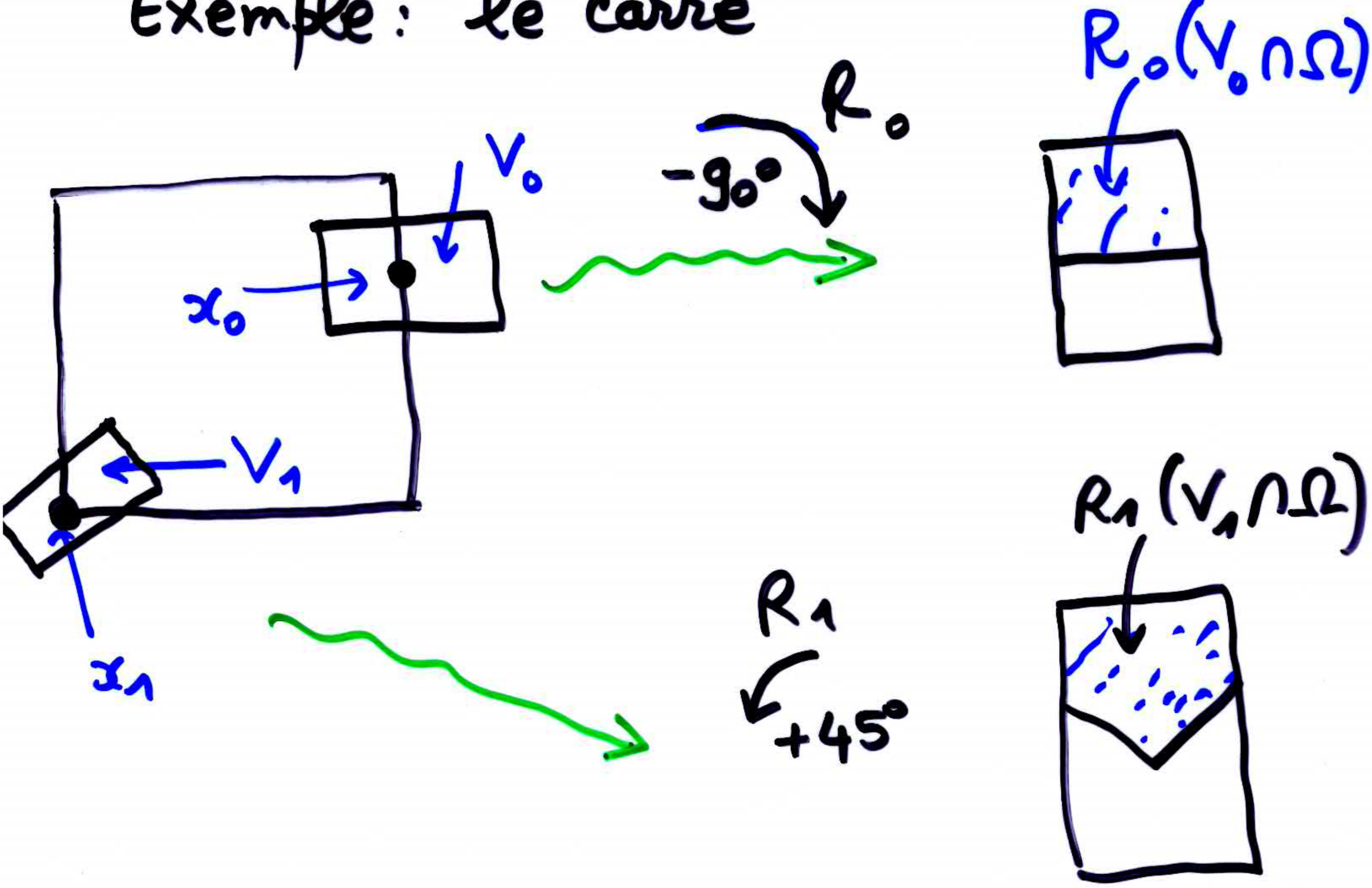
(Ex. : $\psi \in C^1 \Rightarrow \omega$ spécial de classe C^1)

<u>Déf.</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n \in$ classe $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall\, x_0 \in \partial\Omega$, $\exists\, V \subset \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de x_0, $\exists\, R \in \mathcal{O}(n)$ tq $R(V \cap \Omega)$ soit spécial $\in$ classe.



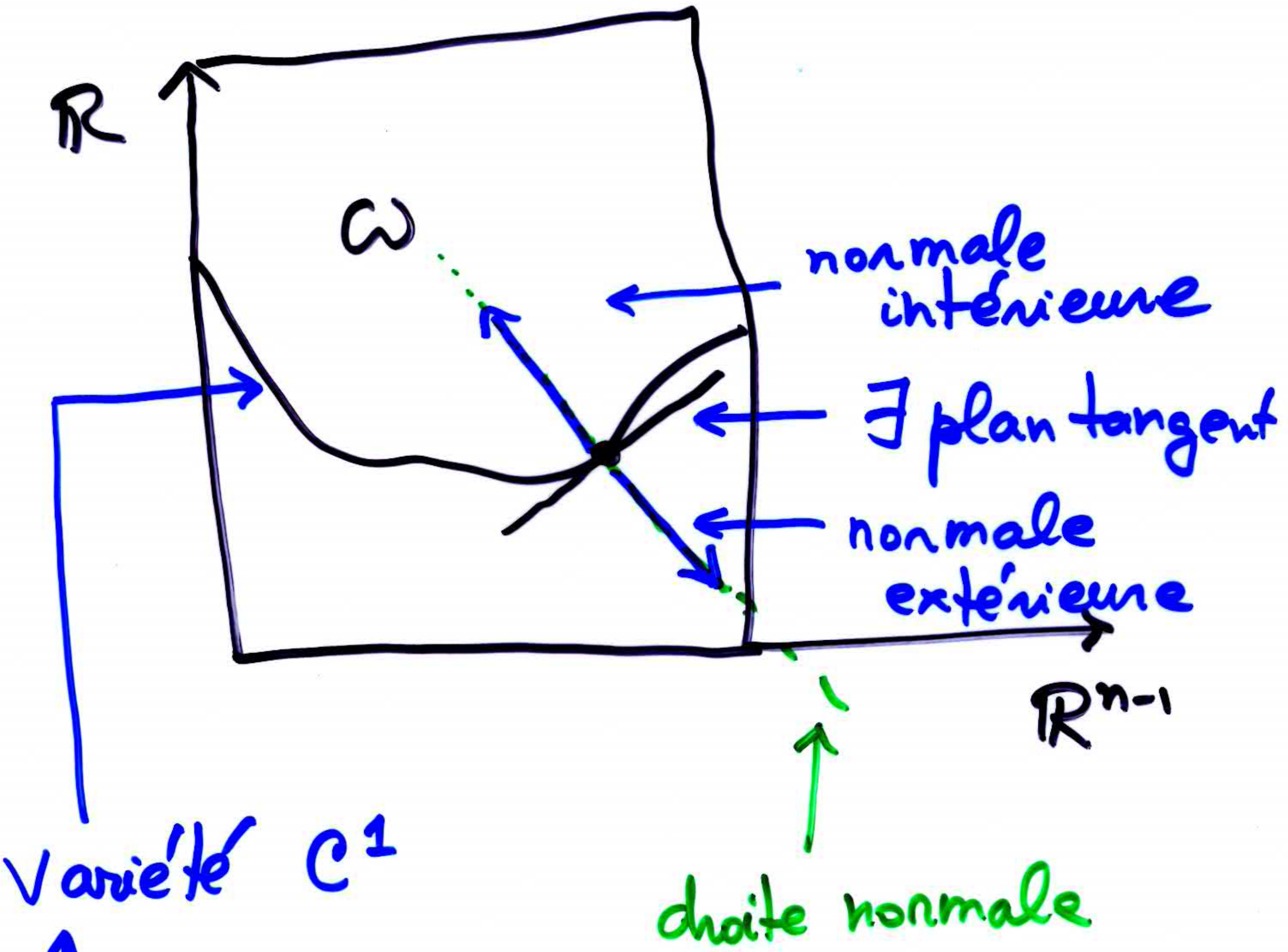
Exemple : le carré



<u>Concl.</u> Un carré (cube, ..) est Lipschitz.

Normale extérieure ν

1) Domaine spécial au moins C^1



paramétrée

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{cases}$$

$$\nu(x) = \frac{(\nabla\psi(x'), -1)}{\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2}}$$

avec $x = (\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x'}, x_n) = (x', x_n)$

$\boxed{\text{2) Domaine spécial Lipschitz}}$

⚠ ψ Lipschitz $\not\Rightarrow$ ψ différentiable

(Ex : $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = |x|$)

$\boxed{\text{Thm Rademacher}}$ (Evans, Gariepy, Thm 2, p. 81)

Hyp. $\psi : U \to \mathbb{R}$ Lipschitz

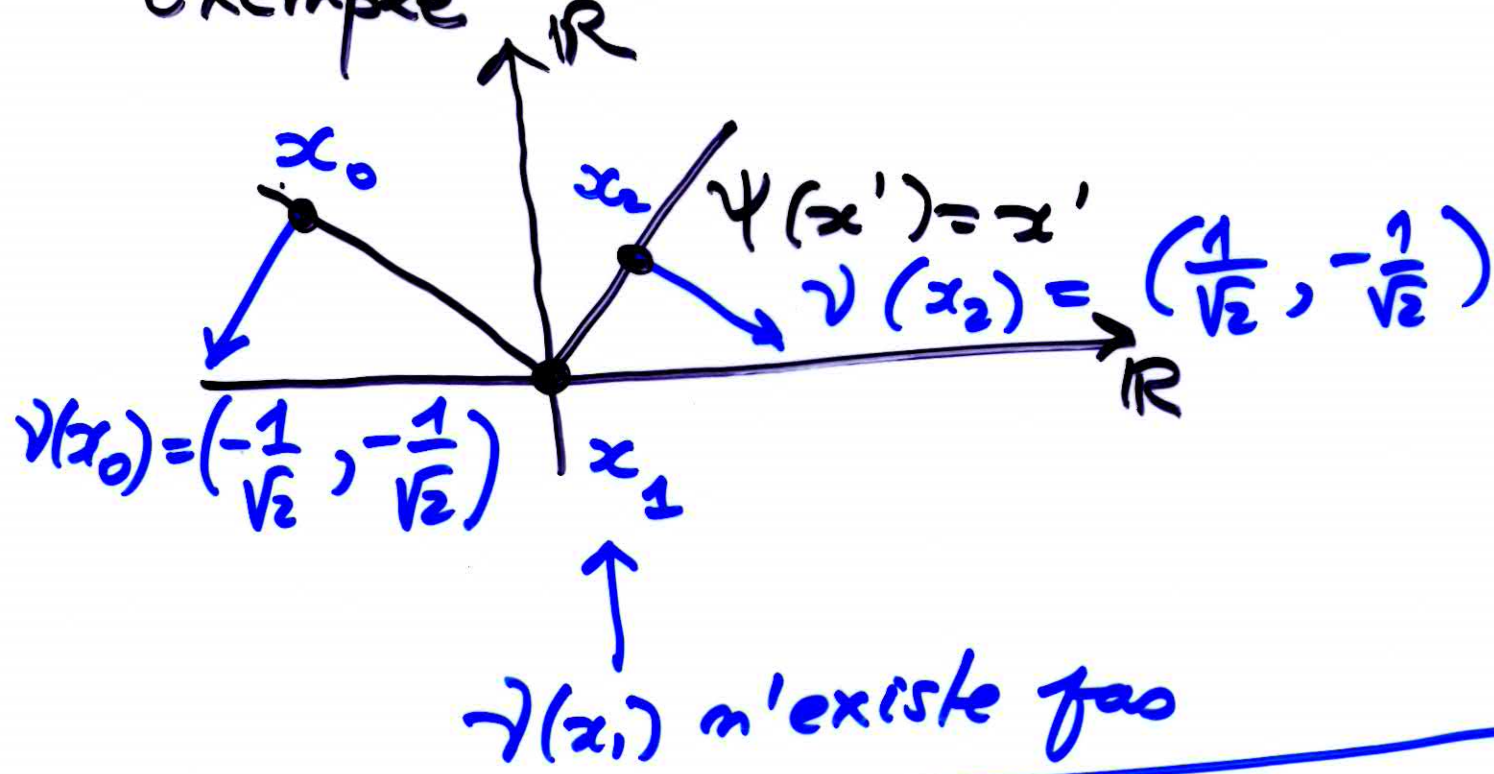
($U \subset \mathbb{R}^k$)

Concl. ψ différentiable p. p.

Ω spécial lipschitz $\Rightarrow$ on définit p.p. dans U

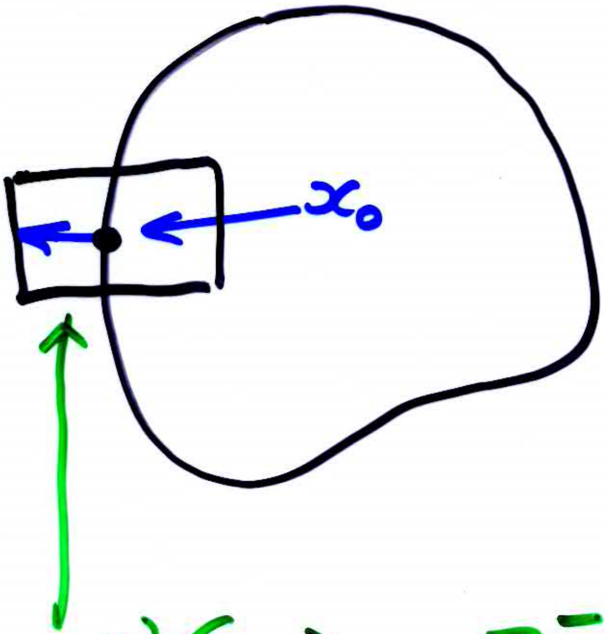
$$\nu(x) = \frac{(\nabla\psi(x'), -1)}{\sqrt{1+|\nabla\psi(x')|^2}}.$$

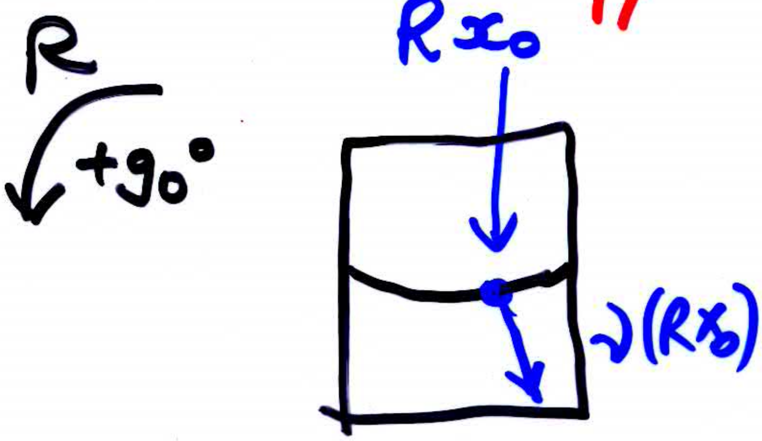
Exemple



3) Cas général : $\Omega \in$ Lip, $\Omega \in C^1$...

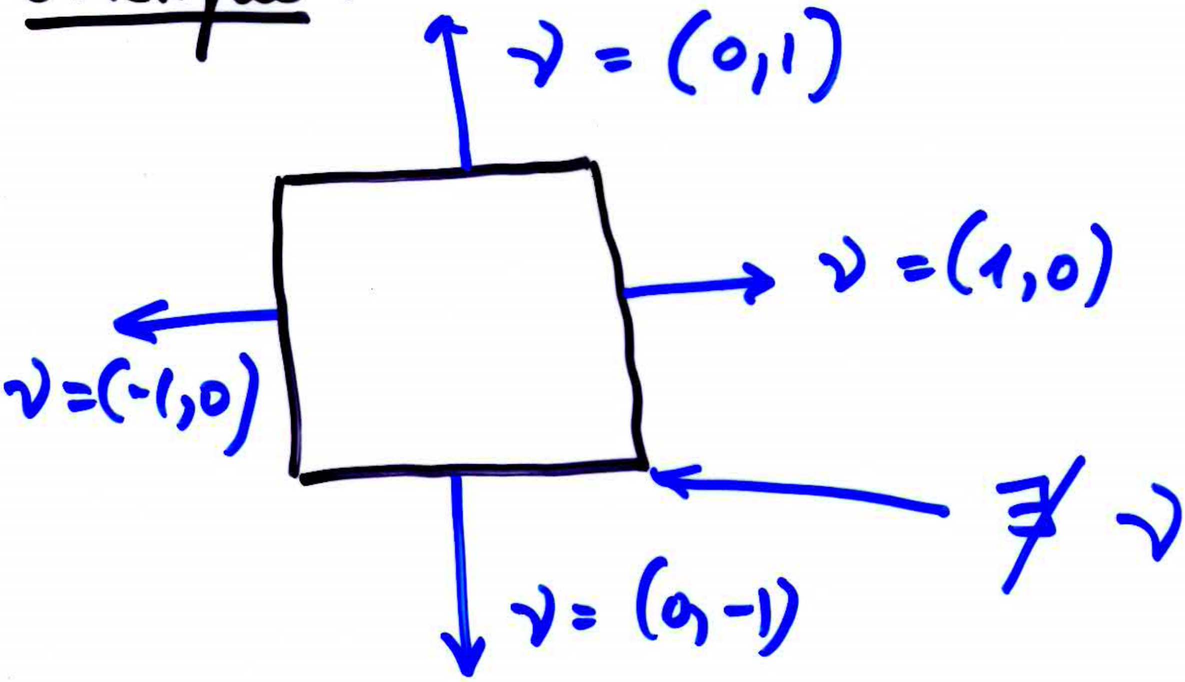
$\to$ par isométrie, on se ramène au cas spécial





$$\nu(x_0) = R^{-1}[\nu(Rx_0)]$$

Exemple :



Proposition (très utile)

<u>Hyp.</u> : • $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $k \geq 1$

• $\exists\, x_0$ tq $\varphi(x_0) = 0$

• Le système $\begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ \nabla\varphi(x) = 0 \end{cases}$

n'a pas de solution

<u>Concl.</u> • $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) < 0\}$

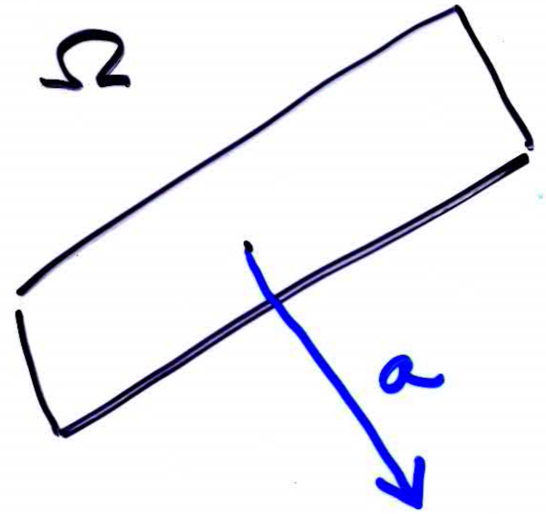
$\in C^k$

• $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) = 0\}$

• Si $x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow \nu(x_0) = \dfrac{\nabla\varphi(x_0)}{|\nabla\varphi(x_0)|}$.

Exemples

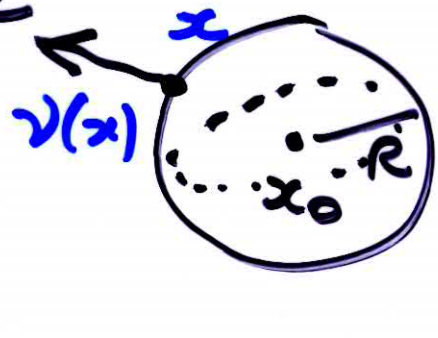
• Demi-espace



$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \underbrace{x \cdot a - b}_{\varphi(x)} < 0\}$$

$$\nu(x) = \frac{a}{|a|},\ \forall x \in \partial\Omega$$

• Boule



$$\varphi(x) = |x - x_0|^2 - R^2$$

$$\nu(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

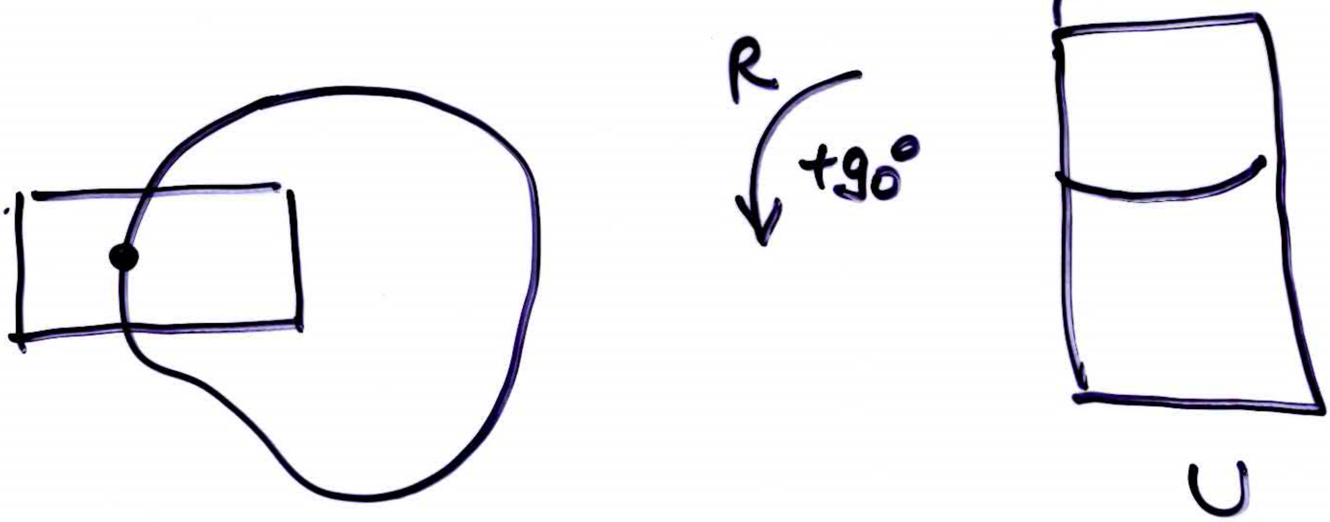
• Extérieur d'une boule $\Longrightarrow \nu(x) = -\dfrac{x - x_0}{|x - x_0|}$

Mesure superficielle

= mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionnelle

$\overset{\text{not.}}{=} d\sigma$ ou $d\mathcal{H}^{n-1}$.

Localement, $\partial\Omega$ est paramétré :



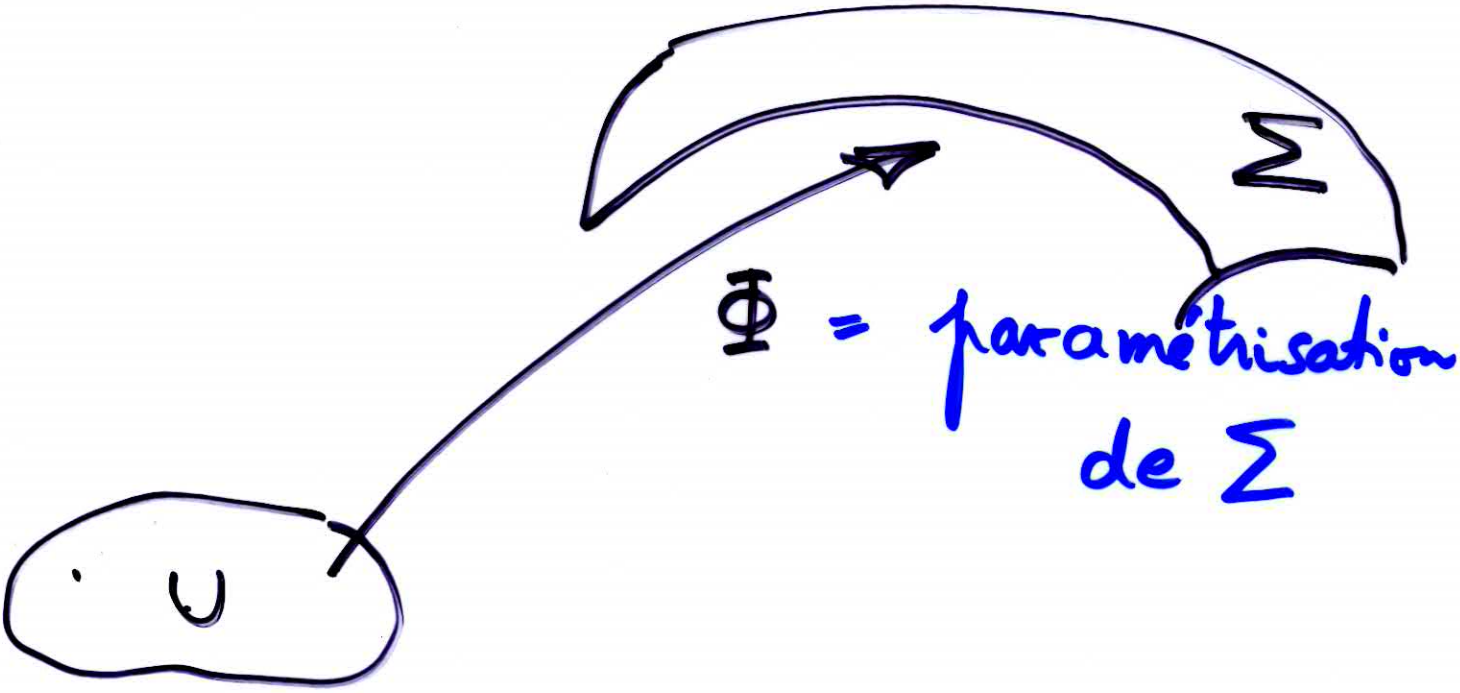
$$U \ni x' \longmapsto (x', \psi(x')) \longmapsto R^{-1}(x', \psi(x'))$$

"En découpant $\partial\Omega$ en morceaux"

OPS $\partial\Omega$ paramétré.

Mesure superficielle d'une (hyper) surface paramétrée

(Evans – Gariepy, pp. 96–103)



$U \subset \mathbb{R}^n$ borélien

$\Phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ Lipschitz

$\Phi(U) = \Sigma$

Φ injective

"Elément de surface":

$$J\Phi(u) = \sqrt{\sum \text{mineurs}^2 \ \mathrm{Jac}\,\Phi(u)}$$

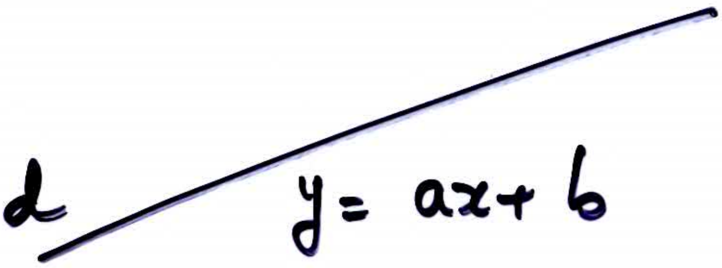
n mineurs

$$\int_\Sigma f(x)\,d\sigma(x) = \int_\Sigma f(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) =$$

$$\int_U f(\Phi(u))\, J\Phi(u)\, du$$

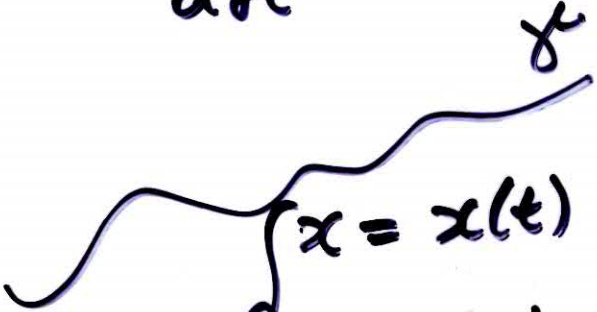
défini p.p. (Thm de Rademacher)

Exemples :

- 

$\Phi(x) = (x, ax+b)$

$$\int_d f(x,y)\,\underset{\substack{\| \\ d\mathcal{H}^1}}{d\ell} = \int_{\mathbb{R}} f(x, ax+b)\sqrt{1+a^2}\,dx.$$

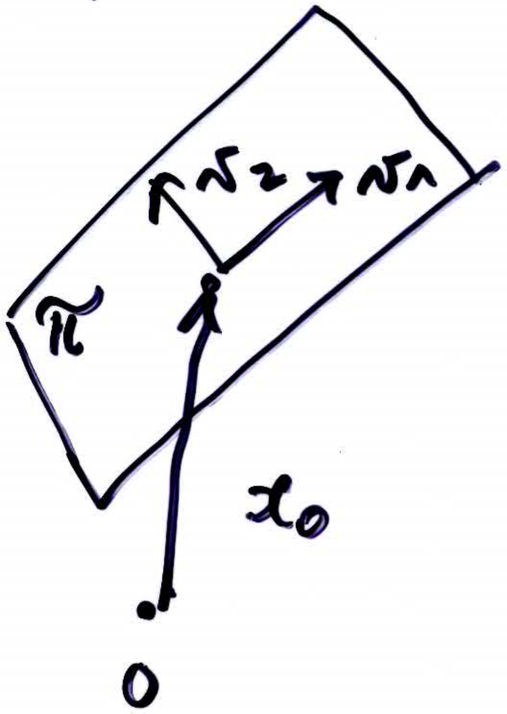
- 

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$

$$\int_\gamma f(x,y)\,d\ell = \int_I f(x(t), y(t)) \times \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

- $$\int_{C(0,r)} f(x,y)\,d\ell = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta$$

• Espace affine



$v_1, \dots, v_{n-1}$ BON de π $\Rightarrow$

$$\int_{\pi} f(x) \underbrace{d\sigma(x)}_{d\mathcal{H}^{n-1}(x)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\Big(x_0 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j v_j\Big)$$

$\times\, dt_1 \dots dt_{n-1}$.

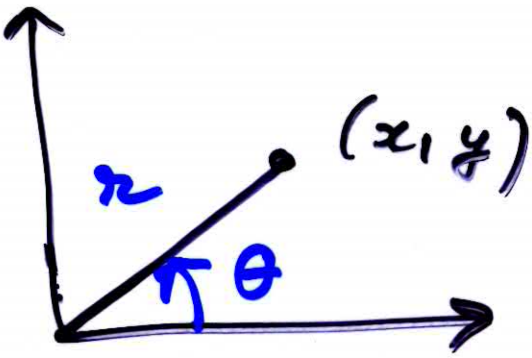
• Cas particulier:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{a\}} f(x)\, d\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', a)\, dx'.$$

Coordonnées polaires, sphériques, ...

Plan ($n=2$)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} = \Phi(r,\theta) \qquad \begin{matrix} r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi[\end{matrix}$$

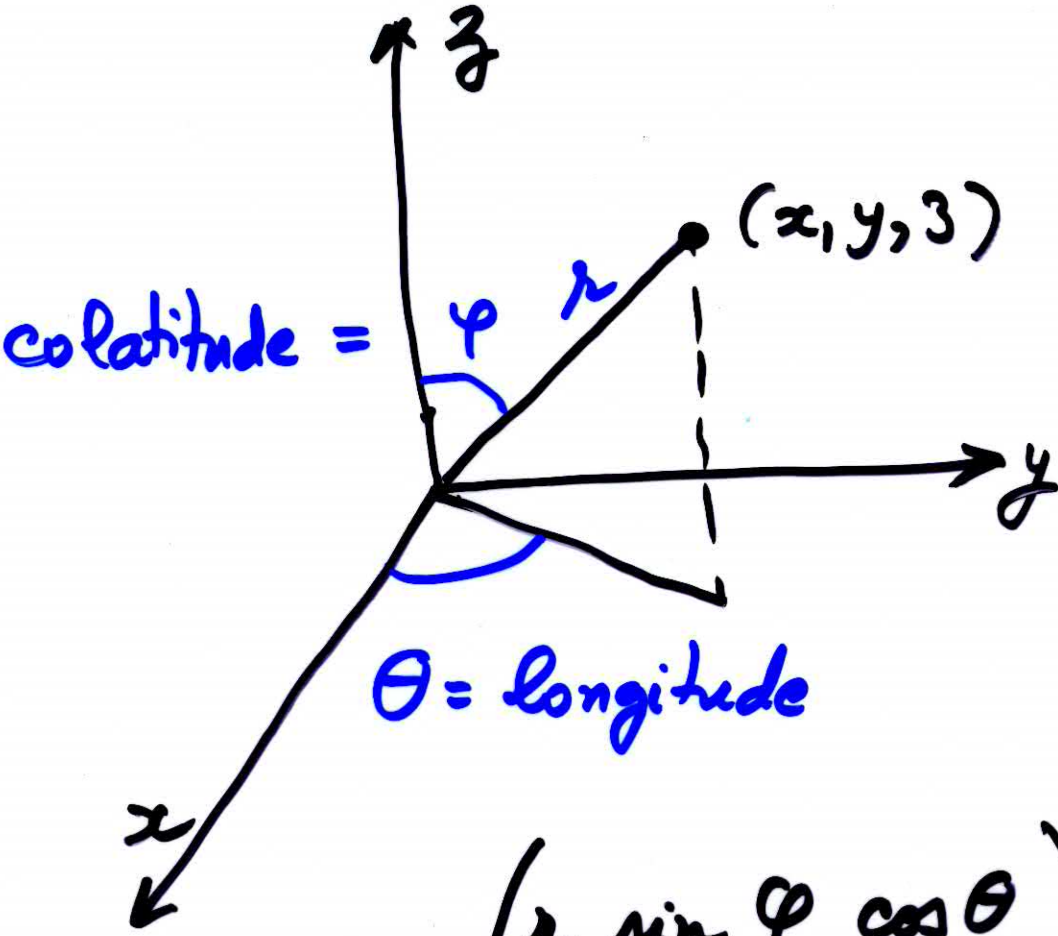


$$J\Phi(r,\theta) = r$$

à la fois pour la paramétrisation du plan et de $C(0,r)$

même phénomène en toute dimension

Espace ($n=3$)



$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin\varphi \cos\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$J\Phi = r^2 \sin\varphi$$

↑ pour la paramétrisation de $\mathbb{R}^3$ ou $S(0, r)$

n quelconque

$r \geq 0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi]$,

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Phi \left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-2} \cos\theta \\ x_2 = r \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-2} \sin\theta \\ x_3 = r \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ x_n = r \cos\varphi_1 \end{array} \right.$$

$$J\Phi = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-2}$$

même jacobien pour $\mathbb{R}^n$ et $S(0, r)$

D'autres choix de paramétrisation $\exists$ dans la littérature

Digression : Mesure vs Intégrale

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$\int_a^b f(x)\,dx = ?$ $\rightsquigarrow$ $F(b) - F(a)$

$\rightsquigarrow$ limite sommes de Riemann

$\rightsquigarrow$ l'intégrale de f / mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Σ = (hyper) surface paramétrée

$\int_\Sigma f\,d\sigma = ?$ $\rightsquigarrow$ formule ci-dessus

$\rightsquigarrow$ l'intégrale de f / mesure "de Hausdorff $(n-1)$-dim." $\mathcal{H}^{n-1}$

Retour aux formules intégrales :

Thm flux-divergence

Hyp. $\Omega \in \mathrm{Lip}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$

(HC)

Concl. $$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma$$

COROLLAIRES

IPP

Hyp. $\Omega \in \mathrm{Lip}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$f, g \in C^1(\overline{\Omega})$

(HC)

Concl. $$\int_\Omega (\partial_j f)\, g = \int_{\partial\Omega} \nu_j\, f g - \int_\Omega f\, \partial_j g$$

j^e coordonnée de ν

1^e formule de Green

Hyp. $\Omega \in \mathrm{Lip}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$f \in C^2(\overline{\Omega})$, $g \in C^1(\overline{\Omega})$

(HC)

Concl. $$\int_\Omega (\Delta f)\, g = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, g - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla f$$

2^e formule de Green

<u>Hyp:</u> $\Omega \in \text{Lip}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$f, g \in C^2(\overline{\Omega})$

(HC)

<u>Concl.</u>

$$\int_\Omega (\Delta f) g = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} g - f \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) + \int_\Omega f \Delta g$$

QUELQUES SOLUTIONS FONDAMENTALES

Le laplacien

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x| \,, & n = 2 \\[2ex] -\dfrac{1}{\sigma_n (n-2)|x|^{n-2}} \,, & n \geq 3 \end{cases}$$

σ_n : mesure de $S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$

Thm. E solution fondamentale de Δ

Preuve :

Etape 1. E mesurable

Etape 2. $E \in L^1_{loc}$

Intégrales de référence

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^a}\,dx < \infty \text{ ssi } a<n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \frac{1}{|x|^a}\,dx < \infty \text{ ssi } a>n$$

Etape 3. On doit mq

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{E(-x)}_{=E(x)} \Delta\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Idée : 2^e formule de Green : mais problème en $x=0$

Solution : calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon) = \Omega_\varepsilon} E(x)\, \Delta\varphi(x)$

2e formule de Green $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} E(x)\, \Delta\varphi(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\Delta E(x)}_{=0 \text{ (le prouver!)}} \varphi(x)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} E - \varphi \frac{\partial E}{\partial\nu} \right)$$

<u>Etape 4.</u>

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} E \right| \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_\varepsilon) \, \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} {}^{*}$$

$$\left| E|_{S(0,\varepsilon)} \right| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \, ,$$

en utilisant

Exo $\mathcal{H}^{n-1}(S(0,r)) = r^{n-1}\sigma_n$

$= r^{n-1}\,\mathcal{H}^{n-1}(S(0,1))$.

Etape 5.

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \nu}\varphi =$$

Calcul: $-\dfrac{\partial E}{\partial \nu} = \dfrac{1}{\varepsilon^{n-1}\sigma_n}$

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}\sigma_n}\int_{S(0,\varepsilon)} \varphi = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\sigma_n}\int_{S(0,\varepsilon)} (\varphi - \varphi(0))$$

car $\mathcal{H}^{n-1}(S(0,\varepsilon)) = \varepsilon^{n-1}\sigma_n$

$$+\varphi(0)$$

$\Rightarrow$

$$\left| -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \nu}\varphi - \varphi(0)\right| \leq \max_{x\in S(0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(0)|$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Conclusion :

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)} E(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx = \varphi(0). \quad \square$$

$E \in L^1_{loc}$ + TCD (le prouver!)

<u>Corollaire</u>. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$u = E * f$ vérifie $\Delta u = f$. $\square$

$\boxed{\text{Equation des ondes 1 D}}$

$$\partial_t^2 - \partial_x^2$$

$\boxed{\text{Thm.}}$ $E(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|)$

est solution fondamentale de $\partial_t^2 - \partial_x^2$

fonction de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Voir en TD

<u>Rq:</u> $E(x,t) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{(x,t)\,;\,|x|<t\}}$

Equation de la chaleur

$$L = \partial_t - \Delta_x$$

$\boxed{\underline{\text{Thm.}}}$ $$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t>0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

est solution fondamentale de L.

Voir TD ou

Hörmander, Thm 3.3.3, p. 81

Vol. I

Equation de Schrödinger 1D

$$Su = u_t - i\,u_{xx}$$

$$S = \partial_t - i\,\partial_{xx}$$

Thm

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi i t}}\, e^{\frac{i x^2}{4t}}, & \text{si } t>0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est une solution fondamentale de S.

voir TD ou Hörmander, vol. I, Thm 3.3.5, p. 82

Existence de la solution fondamentale

Thm (Malgrange-Ehrenpreis)

Tout $P(\partial) \neq 0$ admet une solution fondamentale distribution

généralisation (L. Schwartz) de la notion de fonction localement intégrable

Mais en général $E \notin L^1_{loc}$