Université Claude Bernard Lyon 1 | Master de mathématiques 1re année

UE Équations aux dérivées partielles | Parcours Mathématiques générales

Devoir surveillé $\#1$
Autour de l'équation des ondes
– le 4 avril 2025, durée 60 minutes –

Cadre général. Nous nous intéressons à l'équation des ondes homogène

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} . \tag{1}$$

I.

(a) Expliquer le sens de chaque égalité dans (1), en explicitant les variables indépendantes qui apparaissent, ainsi que les dérivées partielles qui interviennent.

(b) Préciser ce qui est donné et ce qui est inconnu dans (1).

(c) Pour une régularité « naturelle » à obtenir sur la solution, quelles sont les hypothèses « évidentes » de régularité sur les données ?

Par la suite, nous faisons une analyse partielle de (1). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, soit $S(x,r)$ la sphère (euclidienne) $S(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, |y-x| = r\}$. Si $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, soit

$$U(x,t,r) := \fint_{S(x,r)} u(y,t)\, d\mathscr{H}^{n-1}(y). \tag{2}$$

II. Dans cette partie, $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ n'est pas supposée être solution de (1).

(d) Montrer que

$$U(x,t,r) = \fint_{S(0,1)} u(x+rz,t)\, d\mathscr{H}^{n-1}(z). \tag{3}$$

(e) Si $r \le 0$, nous *définissons* $U(x,t,r)$ comme le membre de droite de (3), de sorte que U est maintenant définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que U est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(f) Montrer que U est paire dans la variable r.

(g) Donner les expressions de U_t et U_{tt} en fonction de u et de ses dérivées partielles.

(h) Si $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, montrer que

$$U_r(x,t,r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta_y u(y,t)\, dy, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U_{rr}(x,t,r) &= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint_{B(x,r)} \Delta_y u(y,t)\, dy \\ &\quad + \fint_{S(x,r)} \Delta_y u(y,t)\, d\mathscr{H}^{n-1}(y), \end{aligned} \tag{5}$$

où $B(x,r)$ est la boule (euclidienne) $B(x,r) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n\,;\, |y-x| < r\}$.

III. Dans cette partie, $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ est solution de (1).

(i) Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$, exprimer $U(x,0,r)$, respectivement $U_t(x,0,r)$, en fonction de f, respectivement g.

(j) Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, alors

$$r(U_{tt} - U_{rr}) - (n-1)U_r = 0. \tag{6}$$

(k) Montrer que (6) reste vraie si $r \leq 0$.

(l) Dans cette question, $n = 3$. Posons, pour $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{U}(x,t,r) \coloneqq rU(x,r,t).$$

Montrer que $\widetilde{U}(x,\cdot,\cdot)$ vérifie l'équation des ondes à une variable $r \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} = 0. \tag{7}$$

(m) Même cadre que dans la question précédente. Écrire le problème

$$\begin{cases} \widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \widetilde{U}_{|t=0} = ? & \text{dans } \mathbb{R} \\ \widetilde{U}_{t|t=0} = ? & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \tag{8}$$

satisfait, à $x \in \mathbb{R}^3$ fixé, par $\widetilde{U}(x,\cdot,\cdot)$.

(n) Indiquer la démarche menant à la synthèse (résolution rigoureuse) de (1) pour $n = 3$ à partir de la question précédente.