Université Claude Bernard Lyon 1 Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles Parcours Mathématiques générales

Devoir surveillé #1
Autour du principe du maximum de Павел Сергеевич Александров
(P. S. Alexandrov ; Aleksandrov ; Alexandroff)
– le 8 avril 2025, durée 90 minutes –

Cadre général et notations. (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. (ii) $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R})$. (iii) $\nabla u(x)$ et $H_x u$ désignent, respectivement le gradient et la hessienne de u en x. (iv) $|p|$ désigne la norme euclidienne de $p \in \mathbb{R}^n$. (v) Nous travaillons avec la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. (vi) ω_n désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

A. Le but de cette partie est de montrer (1). Une stratégie est proposée ci-dessous, mais toute preuve correcte et suffisamment autonome est acceptée.

Soit $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$. ($F$ est donc un champ de vecteurs, et dans les applications nous prendrons $F := \nabla u$.) Soit JF le déterminant jacobien de F (qui est un scalaire). On admet les propriétés suivantes :

(i) Si $A \subset \Omega$ est borélien, alors $F(A)$ est Lebesgue mesurable.

(ii) Si $N := \{x \in \Omega\ ;\ JF(x) = 0\}$, alors $F(N)$ est Lebesgue négligeable.

Soit $g : F(\Omega) \to \mathbb{R}$ Lebesgue mesurable, positive. Si $A \subset \Omega$ est borélien, montrer que

$$\int_{F(A)} g(p)\, dp \leq \int_A g(F(x))|JF(x)|\, dx. \tag{1}$$

Indication : on pourra recouvrir l'ouvert $\Omega \setminus N$ avec une suite (B_j) de boules de Ω telles que, sur chaque B_j, F soit un C^1-difféomorphisme sur son image.

B. Le but de cette partie est de démontrer (2). On définit l'ensemble de contact de u comme

$$\Gamma^+ = \Gamma^+(u) := \{x \in \Omega\, ;\, u(y) + [\nabla u(x)] \cdot (x - y) \leq u(x),\ \forall\, y \in \Omega\}.$$

a) Montrer que Γ^+ est borélien et que, en tout point $x \in \Gamma^+$, $H_x u$ est négative (au sens où $-H_x u$ est une matrice symétrique positive).

b) Dans cette partie, Ω est supposé borné. On suppose que $M_1 > M_2$, où $M_1 := \max_{\overline{\Omega}} u$ et $M_2 := \max_{\partial\Omega} u$. (De manière équivalente, tous les points de maximum de u sur $\overline{\Omega}$ appartiennent à Ω.) Soit $M := M_1 - M_2 > 0$. Soit d le diamètre de Ω. Montrer que, si $p \in \mathbb{R}^n$ est tel que $|p| < M/d$, alors il existe $x \in \Gamma^+$ tel que $\nabla u(x) = p$.

c) En déduire que, si $g : B(0, M/d) \to \mathbb{R}$ est borélienne et positive, alors

$$\int_{B(0,M/d)} g(p)\, dp \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u(x))|\det(H_x u)|\, dx. \tag{2}$$

C. Le but de cette partie est de donner quelques applications de (2).

a) Soit u solution de l'équation de Poisson

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

i) Montrer que $f \geq 0$ dans Γ^+.

ii) Si $f^+ \in \mathscr{L}^n(\Omega)$, montrer que

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u + C\|f^+\|_n, \tag{3}$$

pour une constante C que l'on donnera explicitement en fonction de n, de ω_n et du diamètre d de Ω.

b) Soit u solution de l'équation de Monge-Ampère

$$\det(H_x u) = f(x) \text{ dans } \Omega.$$

i) Montrer que, dans Γ^+, f est du signe de $(-1)^n$.

ii) Trouver, pour cette équation, l'analogue de (3), et la constante correspondante C.