Université Claude Bernard Lyon 1 — Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles — Parcours Mathématiques générales

Sujet à étudier pour le deuxième contrôle continu (le mardi 6 mai)

Nous considérons l'équation des ondes d'inconnue $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = g(x) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

avec $f = f(x), g = g(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous admettons les formules de résolution (de d'Alembert, Kirchhoff, Poisson, Darboux) de (1), et en particulier l'existence d'une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ de (1).

Justifier rigoureusement la formule « de l'équipartition de l'énergie »

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(x,t)|^2\, dx = \lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_t(x,t))^2\, dx. \tag{2}$$

Référence suggérée : Evans, Partial Differential Equations [1, Section 4.3, p. 194-195].

Références

[1] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.