Université Claude Bernard Lyon 1 | Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles | Parcours Mathématiques générales

Contrôle continu
– le 10 mars 2023, durée 60 minutes –

Rappels

1. Nous avons
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\, dy = \pi^{n/2}. \tag{1}$$

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est un ouvert de classe C^1, nous avons les formules suivantes d'intégration par parties :
$$\begin{gathered}\int_\Omega f\partial_j g = \int_{\partial\Omega} f\nu_j g - \int_\Omega (\partial_j f) g,\\ \forall\, 1 \le j \le m,\ \forall\, f \in C^1(\overline{\Omega}),\ \forall\, g \in C^1_c(\overline{\Omega}),\end{gathered} \tag{2}$$
$$\begin{gathered}\int_\Omega f\, \mathrm{div}\, X = \int_{\partial\Omega} f\nu \cdot X - \int_\Omega (\nabla f)\cdot X,\\ \forall\, X \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m),\ \forall\, f \in C^1_c(\overline{\Omega}),\end{gathered} \tag{3}$$
$$\begin{gathered}\int_\Omega f\partial_{jj} g = \int_{\partial\Omega} [f\nu_j\partial_j g - (\partial_j f)\nu_j g] + \int_\Omega (\partial_{jj} f) g,\\ \forall\, 1 \le j \le m,\ \forall\, f \in C^2(\overline{\Omega}),\ \forall\, g \in C^2_c(\overline{\Omega}).\end{gathered} \tag{4}$$

3. Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est de la forme $f(x) = g(|x|)$, avec $g \in C^2([0,\infty[)$, alors
$$\Delta f(x) = g''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} g'(|x|),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Exercice # 1. Soit
$$E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0\\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \le 0\end{cases}.$$

Montrer que E est solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur L donné par
$$Lu = \partial_t u - \Delta_x u,\ \ \forall\, u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Exercice # 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1. Soit

$$A = A(x) = (a_{jk}(x))_{1\le j,k\le n} \in C^1(\overline{\Omega}; M_n(\mathbb{R}))$$

une fonction telle que

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \ge 0,\ \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \forall\, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Soient $T > 0$ et $u = u(x,t) \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ solution de

$$\partial_t u - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_{x_k} u \right) = 0,\ \forall\, x \in \Omega, \forall\, t \in [0,T]. \tag{5}$$

Montrer que

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

où

$$\Gamma_T := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,;\ [t = 0 \text{ et } x \in \overline{\Omega}] \text{ ou } [0 < t \le T \text{ et } x \in \partial\Omega]\}.$$

Indication : on pourra étudier la monotonie de

$$[0,T \ni t \mapsto \int_\Omega \Phi(u(x,t))\,dx,$$

en multipliant (5) par $\Phi'(u)$, avec $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convenable.