Université Claude Bernard Lyon 1 | Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles | Parcours Mathématiques générales

Contrôle terminal
– le 31 mai 2024, durée 90 minutes –

Exercice # 1. Soient $T > 0$ et

$$K := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,;\, 0 \le t \le T,\, |x| \le T - t\}.$$

Soit $u = u(x,t) \in C^2(K)$ telle que : (i) $u_{tt} - \Delta_x u = 0$ dans K ; (ii) $u(x,0) = 0$ si $|x| \le T$; (iii) $u_t(x,0) = 0$ si $|x| \le T$.

Montrer que $u = 0$ dans K.

Exercice # 2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $1 \le p < \infty$. Soit

$$\mathscr{F} := \{f \in C_c^\infty(\Omega)\,;\, \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1\}.$$

Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. On admettra le résultat suivant : si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|f(\cdot - h) - f\|_p \le |h|\, \|\nabla f\|_p.$$

Exercice # 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Donner un sens au résultat suivant, et le montrer : $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Exercice # 4. Soit $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| = 1\}$. Trouver toutes les fonctions $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ solutions de

$$\begin{cases} |\nabla u(x)| = 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ u(x) = 0, \ \forall\, x \in \Sigma \end{cases}.$$