À propos du dual de l'espace L^p vectoriel

Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $k \geq 2$ un entier. On munit l'espace

$$L^p(X; \mathbb{R}^k) \coloneqq \{f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)\, ;\ f_j \in L^p(X; \mathbb{R}),\ j = 1, \ldots, k\}$$

de la norme

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\sum_{j=1}^k \|f_j\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\int_X \sum_{j=1}^k |f_j|^p\right)^{1/p}.$$

Lemme. Soit $1 < p < \infty$. Soit q le conjugué de p. Alors

$$\varphi \in [L^p(X; \mathbb{R}^k)]^* \iff \left[\exists\, g \in L^q(X; \mathbb{R}^k) \text{ tel que } \varphi(f) = \sum_{j=1}^k \int_X g_j f_j,\ \forall\, f \in L^p(X; \mathbb{R}^k)\right].$$

De plus, nous avons

$$|||\varphi||| = \|g\|_q.$$

Démonstration. Étape 1. Forme de φ. D'une part, si $g \in L^q(X; \mathbb{R}^k)$, alors l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder donnent

$$\left|\sum_{j=1}^k \int_X g_j f_j\right| \leq \sum_{j=1}^k \int_X |g_j f_j| \leq \sum_{j=1}^k \|g_j\|_q \|f_j\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|g_j\|_q \|f\|_p,$$

et donc

$$L^p(X; \mathbb{R}^k) \ni f \mapsto \varphi(f) \coloneqq \sum_{j=1}^k \int_X g_j f_j$$

est une forme linéaire et continue sur $L^p(X;\mathbb{R}^k)$.

Réciproquement, si $\varphi \in [L^p(X;\mathbb{R}^k)]^*$, soit, pour $1 \leq j \leq k$,

$$\varphi_j(f_j) \coloneqq \varphi(0,\dots,0, \underbrace{f_j}_{\text{en } j^{\text{e}} \text{ position}}, 0,\dots,0),\ \forall\, f_j \in L^p(X;\mathbb{R}).$$

Alors $|\varphi_j(f_j)| \leq |||\varphi||| \|f_j\|_p$, et donc $\varphi_j \in [L^p(X;\mathbb{R})]^*$. Le théorème de Riesz donne l'existence de $g_j \in L^q(X;\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi_j(f_j) = \int_X g_j f_j,\ \forall\, f_j \in L^p(X;\mathbb{R}).$$

Par linéarité,

$$\varphi(f) = \sum_{j=1}^{k} \int_X g_j f_j,\ \forall\, f = (f_1,\dots,f_k) \in L^p(X;\mathbb{R}^k).$$

Étape 2. Calcul de $|||\varphi|||$. L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder (appliquée deux fois) donnent

$$|\varphi(f)| \leq \int_X \sum_{j=1}^{k} |g_j||f_j| \leq \int_X \|g(x)\|_q \|f(x)\|_p \, d\mu(x) \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

et donc $|||\varphi||| \leq \|g\|_q$.

Par ailleurs, en prenant $f_j(x) \coloneqq |g_j(x)|^{q-1} \operatorname{sgn}(g_j(x))$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, 1 \leq j \leq k$, nous avons

$$\varphi(f) = \|g\|_q^q \text{ et } \|f\|_p^p = \|g\|_q^q = \|g\|_q^{p(q-1)},$$

d'où

$$\|g\|_q^q = \varphi(f) \leq |||\varphi||| \|f\|_p = |||\varphi||| \|g\|_q^{q-1},$$

et donc $|||\varphi||| \geq \|g\|_q$. Finalement, $|||\varphi||| = \|g\|_q$. $\square$