Université Claude Bernard Lyon 1 — Master de mathématiques 1re année

UE Équations aux dérivées partielles — Parcours Mathématiques générales

Contrôle continu

– le 26 mars 2026, durée 90 minutes –

Exercice # 1. Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que

$$x \mapsto f(x) := \frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

est une solution fondamentale de Δ.

Exercice # 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et Lipschitz. Soit

$$A = A(x,t) = (a_{jk}(x,t))_{1\leq j,k\leq n} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T]; M_n(\mathbb{R}))$$

une fonction telle que

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \geq 0, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Soient $T > 0$ et $u = u(x,t) \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ solution de

$$\partial_t u - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x,t) \partial_{x_k} u \right) = 0, \ \forall\, x \in \Omega, \forall\, t \in [0,T]. \tag{1}$$

Montrer que

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

où

$$\Gamma_T := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,;\ [t = 0 \text{ et } x \in \overline{\Omega}] \text{ ou } [0 < t \leq T \text{ et } x \in \partial\Omega]\}.$$

Indication : on pourra étudier la monotonie de

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_{\Omega} \Phi(u(x,t))\, dx,$$

en multipliant (1) par $\Phi'(u)$, avec $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convenable.

Exercice # 3. (Une autre preuve de la formule de la moyenne) Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction harmonique. Soit $f(r) := \fint_{S(0,r)} u(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)$.

1. Écrire f comme une intégrale moyenne sur $S(0,1)$.
2. Calculer $\lim_{r \to 0} f(r)$.
3. Exprimer $f'(r)$ comme une intégrale moyenne sur $S(0,r)$.
4. En utilisant la première formule de Green, montrer que f est constante.
5. Conclusion ?

Exercice # 4.

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices symétriques positives. Montrer que le nombre $S := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} b_{jk}$ est ≥ 0. (Indications : écrire $B = C^2$, avec C symétrique, montrer que $S = \mathrm{tr}(CAC)$, et écrire la trace d'une matrice à l'aide du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et de la base canonique.)
2. Soit $u \in C^2(\Omega)$ solution de

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \partial_j \partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \partial_j u(x) + u(x) = 0,$$

avec $A(x) = (a_{jk}(x))_{1 \leq j,k \leq n}$ matrice symétrique positive, $\forall\, x \in \Omega$. Si x_0 est un point de minimum local de u, montrer que $u(x_0) \leq 0$.

Exercice # 5. Si $u \in C^2(R^n)$ et $A \in \mathscr{O}(n)$, montrer que $\Delta(u \circ A) = (\Delta u) \circ A$.