

Résumés des cours

– semestre de printemps 2024 –

A Cours du 19 janvier. Méthodes à la Fourier

- (a) Théorème 1.1.
- (b) Travail individuel : exercice 1.18.
- (c) Heuristique théorème 1.4.
- (d) Travail individuel : calculer la transformée de Fourier inverse de

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto e^{-t|\xi|}$$

(avec $t > 0$ paramètre) en travaillant l'exercice # 12 de la feuille 10 du poly Mesure, intégration, et éléments d'analyse fonctionnelle

http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/cours_mesure_integration.pdf

B Cours du 26 janvier. Méthodes à la Fourier

- (a) Preuve du théorème 1.4.
- (b) Technique du « comportement à l'infini ».
- (c) Transformée de Laplace. Heuristique de la proposition 1.6.
- (d) Proposition 1.6.
- (e) Intégrales de longueur, surface, Jacobien. Intégration sur les sphères.
- (f) Travail individuel : montrer les propriétés du noyau K de la proposition 1.6.
- (g) Travail individuel : exercices 1.18 et 1.17.

C Cours du 2 février. Méthodes à la Fourier

- (a) Exercices 1.18 et 1.17 et preuve des propriétés du noyau K de la proposition 1.6.
- (b) Théorème 1.7.
- (c) Travail individuel : exercice 8.42.
- (d) Travail individuel : si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, trouver une formule pour

$$\partial_r \int_{S(0,r)} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x), \quad r > 0.$$

(e) Définition 1.8.

D Cours du 9 février. Méthodes à la Fourier

- (a) Proposition 1.9.
- (b) Ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lipschitziens et de classe C^k .
- (c) Normale extérieure.
- (d) Les classes $C^k(\overline{\Omega})$.
- (e) Théorème de Gauss-Ostrogradskii et applications.
- (f) Intégration par parties.
- (g) Formules de Green.
- (h) Théorème 1.11.
- (i) Travail individuel : exercices 1.19, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24 et 1.25.

E Cours du 12 février. Méthodes à la Fourier. Laplacien

- (a) Exercices : changement de variables sur les sphères et applications, propriétés du noyau de Poisson, exercices 1.19, 1.21, 1.22, 1.23.
- (b) Théorème 2.4.
- (c) Travail individuel : compléter la preuve du théorème 2.4.

F Cours du 16 février. Laplacien

- (a) Exercice : preuve de la formule (2.5).
- (b) Travail individuel : preuve du théorème 2.5.
- (c) Théorème 2.6.
- (d) Théorème 2.7.
- (e) Travail individuel : preuve du lemme 2.8.
- (f) Théorème 2.9 : principe de la preuve.
- (g) Travail individuel : compléter la preuve du théorème 2.9.
- (h) Proposition 2.10.
- (i) Proposition 2.11.
- (j) Travail individuel : preuve de la proposition 2.13.
- (k) Corollaire 2.14.
- (l) Travail individuel : exercice 2.22, preuve de la proposition 2.15.
- (m) Théorème 2.16 (énoncé).
- (n) Théorème 2.17 (énoncé).
- (o) Travail individuel : preuve de la proposition 2.18.
- (p) Proposition 2.19.

G Cours du 23 février. Laplacien. Chaleur

- (a) Preuve du lemme 2.8.
- (b) Existence de la fonction auxiliaire v dans la preuve du lemme de Hopf (théorème 2.9).
- (c) Travail individuel : si $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $A \in \mathcal{O}(n)$, montrer que $\Delta(u \circ A) = (\Delta u) \circ A$.
- (d) Preuve de la proposition 2.15.
- (e) Définition 3.7.
- (f) Théorème 3.8.
- (g) Travail individuel : compléter la preuve du théorème 3.8 (enlever l'hypothèse $u \in C^2(\Omega \times]0, T])$).
- (h) Corollaire 3.9.
- (i) Théorème 3.10 (énoncé).
- (j) Travail individuel : preuve du lemme 3.13.
- (k) Travail individuel : étape 2 dans la preuve du théorème 3.8 par la méthode d'énergie.
- (l) Théorème 3.14 (énoncé).
- (m) Théorème 3.15 (énoncé).
- (n) Travail individuel : preuves du lemme 3.16 et de la proposition 3.17.
- (o) Proposition 3.20 (énoncé).
- (p) Travail individuel : preuve de la proposition 3.21.

H Cours du 8 mars. Chaleur. Ondes. Espaces de Sobolev

- (a) Fin de la preuve du théorème 3.8.
- (b) Exercice 2.23 1.
- (c) Lemme 3.13.
- (d) Proposition 4.4.
- (e) Définition 9.9 (pour $k = 1$).
- (f) Proposition 9.11 (pour $k = 1$).

I Cours du 2 avril. Espaces de Sobolev

- (a) Proposition 9.22 (avec preuve si $k = 1$).
- (b) Théorème 9.24 (avec preuve si $k = 1$).
- (c) Proposition 9.23 (énoncé modifié admis).
- (d) Proposition 9.13 (avec preuve si $k = 1$ et Ω est borné).

- (e) Propositions 9.14 et 9.17 (avec preuve si $k = 1$).
- (f) Théorème 9.19 (énoncé).
- (g) Théorème 9.20 si Ω est un ouvert borné Lipschitz (énoncé).
- (h) Exercice à préparer : la preuve de la proposition 9.6 si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
- (i) Exercice à préparer : la preuve de la proposition 9.7 si $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

J Cours du 5 avril. Espaces de Sobolev

- (a) Preuve de la proposition 9.7 si $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
- (b) Preuve de la proposition 9.6 si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
- (c) Opérateurs compacts.
- (d) Théorème de Rellich-Kondratchov 9.32. Début de la preuve.

K Cours du 12 avril. Espaces de Sobolev. Méthodes fonctionnelles pour Δ

- (a) Théorème de Rellich-Kondratchov 9.32. Début de la preuve.
- (b) Proposition 6.1.
- (c) Travail individuel : Proposition 6.2.
- (d) Proposition 6.3.
- (e) Théorème 6.4.

L Cours du 12 avril. Espaces de Sobolev. Méthodes fonctionnelles pour L

- (a) Théorème 6.8. Étapes 1–4.