Partiel

le 7 novembre 2022 – durée 120 minutes

Exercice # 1. Soient $N \geq 3$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + f(x,u) = b(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1}$$

On suppose

(i) $f = f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de Carathéodory (mesurable en x, continue en t).

(ii) $t f(x,t) \geq 0, \forall\, x \in \Omega, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

(iii) $|f(x,t)| \leq a(x)(1+|t|)^{(2N)/(N-2)}, \forall\, x \in \Omega, \forall\, t \in \mathbb{R}$, où $a \in L^\infty(\Omega)$.

(iv) $b \in L^{(2N)/(N+2)}(\Omega)$.

Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solution au sens des distributions de (1).

Exercice # 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe de classe $C^{1,1}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)\, u^p & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}. \tag{2}$$

On suppose

(i) $a \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ pour un $\alpha \in (0,1)$, $a \geq 0$, $a \not\equiv 0$.

(ii) $0 < p < 1$.

1. Montrer que (2) a une solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. [*Indication.* Considérer plutôt l'équation $-\Delta u = a(x)\,(u^+)^p$.]
2. *Bonus.* Si Ω est de classe $C^{2,1}$, cette solution est unique.

Exercice # 3.

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$, montrer que $u\,v \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $C^{1,1}$. On admet le fait que la normale unitaire extérieure $\nu = \nu(x)$ est lipschitzienne sur $\partial\Omega$. Soient $1 \leq p < \infty$ et $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Proposer une définition raisonnable pour $\mathrm{tr}_{|\partial\Omega}\, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, et expliquer pourquoi elle est raisonnable.

Exercice # 4. Rappelons que, si $N \geq 3$ et si $M < \infty$ est fixé, il existe $\delta = \delta(N, M)$ tel que

$$[\Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert}, \ |\Omega| \leq \delta, \ u \in H_0^1(\Omega)] \implies \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq M \int_\Omega u^2.$$

En utilisant des fonctions test de la forme $\psi(t)\, u(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, montrer que le même résultat reste vrai si $N = 2$.

Exercice # 5. On rappelle le résultat suivant (admis).

Théorème. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $C^{1,1}$, $1 < p < \infty$, et $F \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

a une solution généralisée $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1. Montrer que le théorème est vrai si $F \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$.
2. Soient $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ solution, au sens des distributions, de $-\Delta u = \operatorname{div} F$, et $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$. Montrer que $v := \zeta\, u$
   (a) Vérifie, au sens des distributions, une équation de la forme
   $$-\Delta v = M \cdot F + \operatorname{div}\, G + \operatorname{div}\, U + w,$$
   où (avec $C < \infty$ constante indépendante de F et u) $|M| \leq C$, $|G| \leq C\,|F|$, $|U| \leq C\,|u|$, $|w| \leq C\,|u|$.
   (b) Appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ et vérifie (avec $C' < \infty$ constante indépendante de F et u, et $K \subset \Omega$ compact indépendant de F et u)
   $$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C'(\|F\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(K)}).$$
3. *Bonus.* Proposer une stratégie de preuve du théorème basée, inspirée par les items précédents.