Quelques exercices et questions de cours à préparer pour le contrôle terminal

Exercice 1. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de U dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f différentiable sur U . Montrer qu'elle est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in U, \quad f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y-x). \tag{1}$$

Solution : $\forall x, y \in U$ *et* $t \in]0,1[$, *on a :*

$$f(x + t(y-x)) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

par suite $\dfrac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x)$, *on obtient :*

$$\nabla f(x).(y-x) = \lim_{t0^+} \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x),$$

Inversement, si on a (1), on a :

$$f(y) - f(x+t(y-x)) \geq \nabla f(x+t(y-x)).(1-t)(y-x), \tag{2}$$

$$f(x) - f(x+t(y-x)) \geq \nabla f(x+t(y-x)).(-t)(y-x), \tag{3}$$

En calculons $t*(2) + (1-t)*(3)$, *on a :*

$$tf(y) + (1-t)f(x) - f(x+t(y-x)) \geq 0.$$

2. Lorsque n = 1. Montrer que si f dérivable sur U , f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Solution : si f *est convexe, alors (question 1). on a :*

$$f(y) - f(x) \geq f'x)(y-x)$$

et

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y)$$

par suite (la somme des deux inégalitées) :

$$(f'(x) - f'(y))(y-x) \leq 0,$$

ce qui montre que f' *est croissante. Inversement pour* $x \leq y$, *on a:*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt \geq f'(x)(y-x),$$

si $y \leq x$, *on a aussi*

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt \leq f'(x)(x-y),$$

et donc f *est convexe (question 1).*

3. On suppose de nouveau n quelconque. Soit f une fonction convexe de U dans $\mathbb{R}$. Montrer que si a et b sont des minima locaux de f , alors $f(a) = f(b)$. En déduire qu'un minimum local de f est aussi un minimum global. Que peut-on dire de l'ensemble sur lequel f atteint sa valeur minimale ?

   Si a est minimum local, pour tout $x \in U$ et pour $t > 0$ assez petit, on a:

$$0 \leq f(a + t(x - a)) - f(a) \leq t(f(x) - f(a)),$$

   et donc a est un minimum globale. Donc, si a et b sont des minima locaux de f , alors $f(a) = f(b)$. Enfin l'ensemble sur lequel f atteint sa valeur minimale $A = f^{-1}\{f(a)\}$ est un fermé.

4. Donner des exemples de fonctions convexes qui ne sont pas inférieurement bornées et des exemples de fonctions convexes inféri[eurement bornées qui n'atteignent pas leur valeur minimale.

   $f(x) = x$ *et* $f(x) = e^x$

5. On suppose que f est différentiable dans U et que ∇f est nul en un point $a \in U$. Montrer que f admet en a un minimum global sur U .

   D'aprés (1):

$$\forall y \in U, f(y) - f(a) \geq \nabla f(a).(y - a) = 0.$$

   Par suite, f admet en a un minimum global sur U .