Fonctions d'une variable complexe

Contrôle continu final – le 1er juin 2016 de 13 h 30 à 16 h 30

Notations. $\mathbb{D}$ est le disque unité. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct.

Exercice 1. *Montrer qu'il existe une et une seule fonction holomorphe* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *telle que*

$$f^2(z) = \frac{1}{1-z^2}, \ \forall z \in \mathbb{D}, \ \ et\ f(0) = 1.$$

[Indication : pour l'unicité, considérer le quotient de deux solutions du problème.]

Exercice 2. *Montrer que la formule*

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(nz)}{n!}, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

définit une fonction entière.
[Indication. Si $f_N : U \to \mathbb{C}$ *sont holomorphes,* $\forall N \in \mathbb{N}$*, et* $f_N \to f$ *quand* $N \to \infty$ *uniformément sur les compacts de* U*, alors* f *est holomorphe.]*

Exercice 3. *Montrer l'égalité*

$$\frac{1}{2\imath\pi} \int_{\mathscr{C}} e^{\zeta(z+1/z)/2}\, dz = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}, \ \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

On admettra les identités $\displaystyle\int_0^\pi \cos^k\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est impair} \\ \dfrac{1\cdot 3\cdots(k-1)}{2\cdot 4\cdots k}\pi, & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}, \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$

Exercice 4. *On considère l'équation*

$$z^4 - 3z + 1 = 0. \tag{1}$$

1. *Montrer que les racines de* (1) *sont simples.*
2. *Quel est le nombre de racines de* (1) *telles que :* $|z| < 1$ *?* $|z| > 1$ *?*

[Indication : pour la première question du 2, utiliser le théorème de Rouché.]

Exercice 5. *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath t}}{(t-\imath)^2}\, dt.$$

[Indication : intégrer sur le bord d'un grand demi-disque.]

Problème. *Le but du problème est de démontrer le*

Théorème de l'application conforme de Riemann. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe tel que $U \neq \mathbb{C}$. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$. Alors il existe une représentation conforme de U sur $\mathbb{D}$, c'est-à-dire une application $f : U \to \mathbb{D}$ holomorphe et bijective.*

Nous allons supposer que $0 \in U$, mais cette hypothèse n'est pas essentielle.

Dans la preuve, il est utile de considérer l'ensemble de fonctions

$$\mathscr{F} := \{f : U \to \mathbb{D}\,;\, f \text{ holomorphe et injective et } f(0) = 0\} \tag{2}$$

et le nombre (éventuellement infini)

$$T := \sup\{|f'(0)|\,;\, f \in \mathscr{F}\}. \tag{3}$$

Nous rappelons les transformées de Moebius M_a, définies en cours, ainsi que quelques unes de leurs propriétés, qui seront admises. Posons, pour $a \in \mathbb{D}$,

$$M_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

Alors

(i) M_a *s'annule uniquement en* $z = a$.

(ii) M_a *est une fonction holomorphe, et* $M_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *est une bijection.*

(iii) $M'_a(0) = 1 - |a|^2$.

(iv) $M'_a(a) = \dfrac{1}{1-|a|^2}$.

Montrer le théorème de Riemann en suivant les étapes suivantes. [Cette preuve est due à Paul Koebe.] [Les points 1.3, 1.4 et 2.1 sont les plus difficiles ; il peut convenir de les admettre et de passer à la suite. L'étape 3 est la plus facile.]

Étape 1. *L'ensemble $\mathscr{F}$ défini dans* (2) *est non vide*

Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.

1.1 Montrer qu'il existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$g^2(z) = z - z_0, \ \forall z \in U.$$

1.2 Montrer que

$$g(z) + g(\zeta) \neq 0, \ \forall z, \zeta \in U.$$

1.3 En déduire que pour tout $z_1 \in U$ il existe un $r > 0$ (dépendant de z_1) tel que

$$|g(z) + g(z_1)| > r, \ \forall z \in U.$$

[Indication : théorème de l'application ouverte.]

1.4 *En déduire qu'il existe une fonction holomorphe et injective* $f : U \to \mathbb{D}$.
[Indication : considérer $z \mapsto 1/(g(z) + g(z_1))$*.]*

1.5 *Si* $f \in \mathscr{F}$*, montrer que* $|f'(0)| > 0$*. En déduire que* $T > 0$.

Étape 2. *La constante* T *définie dans* (3) *est finie, et le sup dans* (3) *est atteint*

2.1 *Montrer que la famille* $\mathscr{F}$ *a la propriété suivante : si* $(f_n) \subset \mathscr{F}$*, alors il existe une sous-suite* (f_{n_j}) *et une fonction holomorphe* $f : U \to \mathbb{C}$ *telles que*

$$(f_{n_j})^{(k)} \to f^{(k)} \text{ quand } j \to \infty, \text{ uniformément sur les compacts de } U, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

2.2 *Montrer que, si* f *est comme dans la question précédente, alors* $f(0) = 0$ *et* $f(U) \subset \mathbb{D}$.
[Indication : principe du maximum.]

2.3 *Montrer que pour un tel* f *on a soit* $f \equiv 0$*, soit* $f \in \mathscr{F}$.
[Indication : théorème de Hurwitz.]

2.4 *En considérant une suite* $(f_n) \subset \mathscr{F}$ *telle que* $|f_n'(0)| \to T$ *et les questions 1.5–2.3, montrer qu'il existe* $f \in \mathscr{F}$ *telle que* $|f'(0)| = T$*, et qu'en particulier* T *est un nombre fini.*

Étape 3. *La fonction* f *de la question 2.4 est bijective*
La preuve se fait par l'absurde : f *étant injective, si elle n'est pas bijective alors elle n'est pas surjective et donc il existe un* $a \in \mathbb{D} \setminus f(U)$.

3.1 *Montrer qu'il existe* $g : U \to \mathbb{C}$ *holomorphe telle que* $g^2 = M_a \circ f$.

3.2 *Montrer que* $g : U \to \mathbb{D}$*, et puis que* g *est injective.*

3.3 *Posons* $b := g(0)$*. Posons* $h := M_b \circ g$*. Montrer que* $h \in \mathscr{F}$.

3.4 *Montrer que* $g'(0) = \dfrac{1 - |a|^2}{2b} f'(0)$.

3.5 *Montrer que* $h'(0) = \dfrac{1 - |a|^2}{2b\,(1 - |b|^2)} f'(0)$.

3.6 *En déduire que* $|h'(0)| > |f'(0)|$ *et conclure.*
[Indication : calculer $|b|$ *en fonction de* $|a|$*.]*

Barème indicatif

1. Exercices 1–2 : 2 p. chacun.
2. Exercices 3–5 : 3 p. chacun.
3. Problème : 12 p.
4. Total : 25 p.