# Fonctions d'une variable complexe

## Contrôle continu final – corrigé

**Exercice 1.** Soit $g(z) := \dfrac{1}{1-z^2}$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Alors $g$ est holomorphe et $\neq 0$ dans le domaine simplement connexe (car convexe) $\mathbb{D}$. Il existe donc $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h^2 = g$. On a $h^2(0) = g(0) = 1$, d'où $h(0) = \pm 1$. Si $h(0) = 1$, alors $f := h$ convient. Si $h(0) = -1$, alors $f := -h$ convient.

Pour l'unicité, soient $f_1$, $f_2$ solutions du problème. Comme $f_2 \neq 0$ (car $g \neq 0$), la fonction $k := \dfrac{f_1}{f_2}$ et holomorphe. Elle vérifie clairement $k(z) \in \{-1, 1\}$, $\forall z \in \mathbb{D}$. $k$ étant continue et $\mathbb{D}$ étant connexe, $k$ est constante. Comme $k(0) = 1$, on a $k \equiv 1$, d'où $f_1 \equiv f_2$.

**Exercice 2.** Il suffit de montrer que la série converge normalement sur les compacts. En effet, dans ce cas les sommes partielles convergent uniformément sur les compacts. Chaque somme partielle étant clairement holomorphe, il s'en suivra que $f$ l'est.

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact, et soit $R > 0$ tel que $|z| \le R$, $\forall z \in K$. Alors $|\cos(nz)| \le e^{|z|} \le e^{nR}$, $\forall z \in K$, d'où $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in K} \left| \dfrac{\cos(nz)}{n!} \right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{nR}}{n!} = e^{e^R} < \infty$, d'où la conclusion de l'exercice.

**Exercice 3.** On a $I := \dfrac{1}{2\imath\pi} \displaystyle\int_{\mathscr{C}} e^{\zeta(z+1/z)/2}\, dz = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\zeta \cos\theta}\, e^{\imath\theta}\, d\theta$.

Par ailleurs, on a $e^{\zeta \cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta^n \dfrac{(\cos\theta)^n}{n!}$.

Sous réserve que

(∗) la série et l'intégrale commutent

nous avons donc $I = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2\pi} \zeta^n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{(\cos\theta)^n}{n!} (\cos\theta + \imath \sin\theta)\, d\theta}_{:=I_n}$.

Notons que, dans $I_n$, la partie imaginaire de l'intégrande est impaire, donc d'intégrale nulle. Par ailleurs, la partie réelle de l'intégrande est paire, et donc l'intégrale de $-\pi$ à $\pi$ est le double de celle de $0$ à $\pi$. En utilisant ces considérations et le rappel, on obtient

$$I_n = \frac{2}{n!} \int_0^{\pi} (\cos\theta)^{n+1}\, d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{\pi}{2^{2k}\, k!(k+1)!}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

En remplaçant $I_n$ dans la formule de $I$, on obtient la formule demandée.

Il reste à vérifier *(*)*. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} |\zeta^n| \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left| \frac{(\cos\theta)^n}{n!} (\cos\theta + \imath \sin\theta) \right|}_{\le 1/n!} d\theta \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\zeta|^n}{n!} = e^{|\zeta|} < \infty,$$

d'où *(*)* et la conclusion de l'exercice.

**Exercice 4.** Soit $f(z) := z^4 - 3z + 1$.

1. Si $f'(z) = 0$, alors $z^3 = 3/4$ (et en particulier $z \neq 4/9$), et $f(z) = 1 - (9/4)z$ ; d'où $f(z) \neq 0$. Il s'ensuit que la système $f(z) = f'(z) = 0$ n'a pas de solution, d'où la conclusion.
2. Soit $g(z) := -3z$. Alors $|f(z) - g(z)| = |z^4 + 1| \leq 2 < 3 = |g(z)|$, $\forall\, z \in \mathscr{C}$.
   Le théorème de Rouché implique que $f$ et $g$ ont le même nombre de racines dans $\mathbb{D}$ (multiplicités comprises), donc une.
   Du calcul précédent, si $|z| = 1$ alors $|f(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| \geq 1$, et donc $f$ n'a pas de racine sur $\mathscr{C}$.
   Finalement, $f$ ayant quatre racines simples, elle a trois racines telles que $|z| > 1$.

**Exercice 5.** Soit $f(z) := \dfrac{e^{\imath z}}{(z-\imath)^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\imath\}$. Alors $f$ a un pôle d'ordre 2 en $z = \imath$, et on a

$$\operatorname{Res}(f, \imath) = \lim_{z \to \imath} ((z-\imath)^2 f)'(z) = \frac{\imath}{e}.$$

Pour $R > 1$, soit $E_R$ le demi-disque $\{z\,; |z| < R,\ y > 0\}$. Soit $\Gamma_R$ le bord de $E_R$ orienté dans le sens direct. Le théorème des résidus donne

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\imath\pi \frac{\imath}{e} = -\frac{2\pi}{e}.$$

En explicitant l'intégrale sur $\Gamma_R$, on obtient

$$-\frac{2\pi}{e} = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(t)\,dt}_{:=I_R} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{e^{\imath R\, e^{\imath\theta}}}{(R\, e^{\imath\theta} - \imath)^2} \imath R\, e^{\imath\theta}\, d\theta}_{:=J_R}.$$

Comme $|f(t)| = \dfrac{1}{t^2+1}$, on obtient que $I_R \to \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ quand $R \to \infty$.
Par ailleurs,

$$|J_R| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} \frac{R}{(R-1)^2}\, d\theta \leq \pi \frac{R}{(R-1)^2} \to 0 \text{ quand } R \to \infty.$$

On obtient que l'intégrale de l'énoncé est égale à $-\dfrac{2\pi}{e}$.

**Problème. Étape 1.**

1.1 Soit $k(z) := z - z_0$, $\forall\, z \in U$. Alors $k$ est holomorphe, $k \neq 0$ et $U$ est simplement connexe, d'où l'existence de $g$.

1.2 Si $g(z) + g(\zeta) = 0$, alors $g^2(z) = g^2(\zeta)$, d'où $z = \zeta$, d'où $g(z) = 0$, d'où $k(z) = 0$. Absurde.

1.3 $g$ n'étant pas constante (car $k$ ne l'est pas) et $U$ étant connexe, l'image de $g$ est ouverte. Soit $r > 0$ tel que $V := \{-w + g(z_1)\,; |w| \leq r\} \subset g(U)$. Si $-w + g(z_1) \in V$, alors il existe $\zeta \in U$ tel que $-w + g(z_1) = g(\zeta)$, et donc $g(z) + g(z_1) \neq w$ si $z \in U$ et $|w| \leq r$. On obtient $|g(z) + g(z_1)| > r$, $\forall\, z \in U$.

1.4 Posons $f_0(z) := \dfrac{r}{2(g(z)+g(z_1))}$, et $f := f_0 - f_0(0)$. Alors $|f_0| < 1/2$, et $f_0$ est clairement injective (car $k$ l'est, et donc $g$ l'est aussi). Il s'ensuit facilement que $f \in \mathscr{F}$.

1.5 $f$ est injective, d'où $f'(0) \neq 0$, d'où $|f'(0)| > 0$. En particulier, $T > 0$.

**Étape 2.**

2.1 La propriété demandée est satisfaite s'il existe une constante $C$ telle que $|f_n| \leq C$, $\forall\, n$. Dans notre cas, $C = 1$ convient.

2.2 La propriété $f(0) = 0$ est claire. Nous avons aussi (par passage à la limite simple) $|f| \leq 1$. Si $|f(z)| = 1$ pour un $z \in U$, alors $f$ est constante (principe du maximum), d'où $f \equiv 0$, contradiction. Donc $f : U \to \mathbb{D}$.

2.3 Le théorème de Hurwitz donne $f$ injective ou $f$ constante. Si $f$ constante, alors $f \equiv 0$.

2.4 Du *2.1*, on a $|f'(0)| = T > 0$. En particulier, $T$ est fini. Comme $f'(0) \neq 0$, $f$ n'est pas constante, et donc $f \in \mathscr{F}$.

**Étape 3.**

3.1 Soit $F := M_a \circ f$. Alors $F$ ne s'annule pas (car $f$ ne prend pas la valeur $a$, et $M_a$ s'annule uniquement en $z = a$). $U$ étant simplement connexe, l'existence de $g$ s'ensuit.

3.2 On a $|F| < 1$, d'où $|g| < 1$, et donc $g : U \to \mathbb{D}$. $F$ étant injective, $g$ l'est aussi.

3.3 Clairement, $h$ est injective, $h : U \to \mathbb{D}$, et $h(0) = M_b(g(0)) = M_b(b) = 0$.

3.4 En dérivant l'égalité $g^2 = k$ et en utilisant $f(0) = 0$ et $g(0) = b$, on obtient

$$g'(0) = \frac{k'(0)}{2g(0)} = \frac{M_a'(f(0))f'(0)}{2b} = \frac{M_a'(0)}{2b} f'(0) = \frac{1-|a|^2}{2b} f'(0).$$

3.5 En dérivant la définition de $h$ et en utilisant le point précédent :

$$h'(0) = M_b'(g(0))g'(0) = M_b'(b)g'(0) = \frac{1-|a|^2}{2b(1-|b|^2)} f'(0).$$

3.6 On a $b^2 = g^2(0) = k(0) = a$, d'où $|b| = \sqrt{|a|}$. On obtient $|h'(0)| = \dfrac{1+|a|}{2\sqrt{|a|}} |f'(0)| > |f'(0)|$ (on utilise $\dfrac{1+x^2}{2x} > 1$, $\forall\, x > 0$ tel que $x \neq 1$).
Comme $h \in \mathscr{F}$, ceci contredit le fait que $|f'(0)| = T$ et finit la preuve.