Calcul intégral

Petru Mironescu

2007

Table des matières

Chapitre 1

Notations, rappels, définitions

• Si tous les termes de la suite (x_n) appartiennent à l'ensemble A, on écrira $(x_n) \subset A$.
• Si A est une partie de X, le complémentaire de A dans X est noté $X \setminus A$. S'il est clair qui est X, on notera ce complémentaire par A^c.
• Un ensemble est **dénombrable** s'il est en correspondance bijective avec $\mathbb{N}$ (autrement dit : si on peut écrire tous les éléments de A, sans répétition, comme une suite). Un ensemble est **au plus dénombrable** (a. p. d.) s'il est soit fini, soit dénombrable.
• L'outil le plus commode pour vérifier qu'un ensemble est dénombrable est la

Proposition 1.1. *a) Une partie d'un ensemble a. p. d. est a. p. d.*
b) Une union a. p. d. d'ensembles a. p. d. est a. p. d.
c) Un produit cartésien fini d'ensembles a. p. d. est a. p. d.
d) Un ensemble a. p. d. qui contient une infinité d'éléments distincts est dénombrable.
e) Un ensemble qui contient une partie qui n'est pas a. d. p. n'est pas a. d. p.

Ce résultat sera admis (pour la preuve, voir l'appendice de ce chapitre).

Exercice 1.1. *a)* $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ *sont dénombrables.*
b) L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ *est dénombrable.*
c) $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Définition 1.1. *Un* **clan dans** *X (ou* **clan** *tout court, s'il est clair qui est X) est un ensemble* $\mathscr{C}$ *dont les éléments sont des parties de X, tel que :*
i) $\emptyset \in \mathscr{C}$ *;*
ii) si $A \in \mathscr{C}$*, alors* $A^c \in \mathscr{C}$ *;*
iii) Si $A, B \in \mathscr{C}$*, alors* $A \cup B \in \mathscr{C}$.

Remarque 1.1. *La définition d'un clan demande que l'une union de deux ensembles de $\mathscr{C}$ soit encore dans $\mathscr{C}$. Nous verrons plus loin qu'une union* **contenant un nombre fini d'ensembles** *de $\mathscr{C}$ appartient à $\mathscr{C}$.*
En général, une union **infinie** *d'ensembles de $\mathscr{C}$* **n'est pas** *dans $\mathscr{C}$.*
Un raisonnement du genre "chaque A_i (avec $i \in I$) est dans $\mathscr{C}$, d'où $\cup_{i\in I} A_i \in \mathscr{C}$" n'est pas valide, à moins de savoir que I est fini.

Définition 1.2. *Une* **tribu dans** *X (ou* **tribu** *tout court, s'il est clair qui est X) est un ensemble $\mathscr{T}$ dont les éléments sont des parties de X, tel que :*
i) $\emptyset \in \mathscr{T}$;
ii) si $A \in \mathscr{T}$, alors $A^c \in \mathscr{T}$;
iii) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{T}$, alors $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{T}$.
Si une partie A de X appartient à $\mathscr{T}$, on dit que A est **$\mathscr{T}$-mesurable** *(ou* **mesurable** *tout court, quand il est clair qui est $\mathscr{T}$).*

Remarque 1.2. *La définition d'une tribu demande qu'une union* **dénombrable** *d'ensembles de $\mathscr{T}$ soit encore dans $\mathscr{T}$. En général, une union* **quelconque** *d'ensembles de $\mathscr{T}$ n'est pas dans $\mathscr{T}$.*
Un raisonnement du genre "chaque A_i (avec $i \in I$) est dans $\mathscr{T}$, d'où $\cup_{i\in I} A_i \in \mathscr{T}$" n'est pas valide, à moins de savoir que I est a. p. d.

• **Dictionnaire.** a) Clan=algèbre=(en anglais) algebra.
b) Tribu=σ-algèbre=(en anglais) σ-algebra.

Exercice 1.2. *a) $\mathscr{P}(X)$ (l'ensemble de toutes les parties de X) est une tribu.*
b) Si $X = \{1,2,3\}$, alors $\mathscr{C} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}$ est une tribu.

Exercice 1.3. *Si X est fini, alors tout clan est une tribu.*

Définition 1.3. *Une suite (A_n) de parties de X est :*
a) **croissante** *si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n ;*
b) **décroissante** *si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n ;*
c) **d. d. d.** *(acronyme pour "deux-à-deux disjointes") si $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$.*

• **Notations :** a) $A_n \nearrow A$ veut dire que la suite (A_n) est croissante et $A = \cup A_n$;
b) $A_n \searrow A$ veut dire que la suite (A_n) est décroissante et $A = \cap A_n$.

Définition 1.4. *Si $A \subset X$, la fonction caractéristique de A est $\chi_A : X \to \{0,1\}$, définie par* $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \in X \setminus A \end{cases}$.

Exercice 1.4. *Montrer que $A_n \nearrow A$ ssi : la suite de fonctions (χ_{A_n}) est croissante et converge simplement vers χ_A.*
De même, $A_n \searrow A$ ssi : la suite de fonctions (χ_{A_n}) est décroissante et converge simplement vers χ_A.

Définition 1.5. *Une* **classe monotone dans** *X est un ensemble $\mathscr{M}$ de parties de X tel que :*
i) Si $(A_n) \subset \mathscr{M}$ est une suite croissante, alors $\cup A_n \in \mathscr{M}$;
ii) Si $(A_n) \subset \mathscr{M}$ est une suite décroissante, alors $\cap A_n \in \mathscr{M}$.

Exercice 1.5. *Toute tribu est un clan.*
Toute tribu est une classe monotone.

Définition 1.6. *Si $\mathscr{C}$ est un clan, une* **mesure positive sur** *$\mathscr{C}$ (ou* **mesure** *tout court) est une application $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ telle que :*
i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) Si $(A_n) \subset \mathscr{C}$ est une suite d. d. d. et si $\cup A_n \in \mathscr{C}$, alors $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$.
Dans le cas particulier où $\mathscr{C}$ est une tribu, l'hypothèse $\cup A_n \in \mathscr{C}$ est automatiquement satisfaite.

Exercice 1.6. *Montrer que ii)$\Longrightarrow \mu(\emptyset) = 0$ ou ∞.*

Exercice 1.7. *Soit X un ensemble. Montrer que l'application $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$, $\mu(A) = \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est f} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$ est une mesure sur $\mathscr{P}(X)$. C'est la* **mesure de comptage**.

Définition 1.7. *a) Un* **espace mesurable** *est un couple $(X, \mathscr{T})$, avec $\mathscr{T}$ tribu dans X.*
b) Un **espace mesuré** *est un triplet $(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $\mathscr{T}$ tribu dans X et μ mesure sur $\mathscr{T}$.*

• Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union a. p. d. d'intervalles ouverts. De plus, on peut choisir ces intervalles d. d. d.
• Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, tout point de $\mathbb{R}^n$ est la limite d'une suite de points ayant toutes les coordonnées rationnelles.

Appendice : Preuve de la Proposition 1.1. Autres résultats concernant le dénombrement

Lemme 1.1. *Toute partie infinie A de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

Démonstration. Soit $x_0 = \min A$.
Si $x_0, x_1, \dots, x_n$ ont déjà été choisis, on pose $A_n = A \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Alors A_n est non vide, sinon A serait fini. On définit $x_{n+1} = \min A_n$.
La suite d'entiers (x_n) est strictement croissante, donc $x_n \to \infty$.

Il suffit de montrer que $A = \{x_0, x_1, \ldots\}$ (en effet, dans ce cas $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = x_n$ est une bijection).
Preuve par l'absurde :
Supposons que $x \in A$ et $x \neq x_n$ pour tout n. On a $x > x_0$, par choix de x_0, d'où $x \in A_0$. Comme $x \neq x_1$, on trouve $x > x_1$. Par récurrence, $x \notin A_n$ et $x > x_{n+1}$ pour tout n. En passant à la limite, $x \geq \lim x_{n+1} = \infty$, absurde. □

Lemme 1.2. *Si $A \subset B$ avec B a. p. d., alors A est a. p. d.*
Par contraposée, si $A \subset B$ et A n'est pas a. p. d., alors B n'est pas a. p. d.

Démonstration. Si A ou B est fini, c'est clair. Supposons A et B infinis.
Soit $f : B \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors la restriction g de f à A est une bijection entre A et $C = f(A)$.
C est infini, sinon A serait fini.
Le lemme précédent montre qu'il existe une bijection $h : C \to \mathbb{N}$.
Alors $h \circ g : A \to \mathbb{N}$ est une bijection. □

Lemme 1.3. *S'il existe une injection f de A vers $\mathbb{N}$, alors A est a. p. d. La réciproque est vraie.*

Démonstration. A est en bijection avec $B := f(A) \subset \mathbb{N}$.
Si B est fini, alors A l'est aussi.
Si B est infini, alors B est en bijection avec $\mathbb{N}$, donc A l'est aussi.
Réciproquement, supposons A a. p. d. Si A est infini, alors A est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Si A est fini, alors on peut écrire $A = \{x_0, \ldots, x_k\}$, et la fonction $A \ni x_n \mapsto n \in \mathbb{N}$ est injective. □

Lemme 1.4. *Si B est a. p. d. et s'il existe une injection $f : A \to B$, alors A est a. p. d.*

Démonstration. L'ensemble $C = f(A)$ est une partie de B, donc est a. p. d.
A est en bijection avec C, donc C est a. p. d. □

Théorème 1.1. *(**de Cantor-Bernstein**) S'il existe une injection $f : A \to \mathbb{N}$ et une injection $g : \mathbb{N} \to A$, alors A est dénombrable.*

Démonstration. A est en bijection avec $f(A) \subset \mathbb{N}$, donc A est a. p. d.
Par ailleurs, A n'est pas fini, car il contient la suite d'éléments distincts $g(0), g(1), \ldots$.
Il s'ensuit que A est dénombrable. □

Lemme 1.5. *$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Démonstration. $\mathbb{N}^2$ est infini, car il contient la suite d'éléments distincts $(n,0)_{n\in\mathbb{N}}$.
Il suffit donc de construire une application injective $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.
Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m,n) = \dfrac{(m+n+1)(m+n+2)}{2} + n$. Nous allons montrer que f est injective.
Soit $p = m + n + 1$. Clairement,

$$\frac{p(p+1)}{2} \leq f(m,n) < \frac{p(p+1)}{2} + p = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Si $f(m,n) = f(m',n')$, alors on a $m+n = m'+n'$. Preuve par l'absurde :
Supposons, par exemple, $p = m+n < q = m'+n'$. Alors $p+1 \leq q$, d'où $\frac{(p+1)(p+2)}{2} \leq \frac{q(q+1)}{2}$. On trouve

$$f(m,n) < \frac{(p+1)(p+2)}{2} \leq \frac{q(q+1)}{2} \leq f(m',n'),$$

contradiction.
Utilisant ce résultat et la formule de f, on trouve $f(m,n) = f(m',n') \Longrightarrow n = n' \Longrightarrow m = m' \Longrightarrow (m,n) = (m',n')$, d'où l'injectivité de f. □

Exercice 1.8. *La fonction f ci-dessus est une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}^*$.*
Trouver une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Les résultats suivants prouvent la Proposition 1.1.

Lemme 1.6. *Un produit cartésien fini d'ensembles a. p. d. est a. p. d.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat quand il y a deux facteurs ; le cas général s'obtient par récurrence sur le nombre de facteurs dans le produit.
Soient A_1, A_2 deux ensembles a. p. d. Si A_1 est fini, on peut écrire $A_1 = \{x_0, \ldots, x_k\}$. Sinon, soit $f : \mathbb{N} \to A_1$ une bijection ; on pose $x_n = f(n)$. Alors $A_1 = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$. Dans les deux cas, on peut écrire $A_1 = \{x_i\ ;\ 0 \leq x_i < l\}$ où $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
De même, on peut écrire $A_2 = \{y_j\ ;\ 0 \leq j < p\}$.
La fonction $A_1 \times A_2 \ni (x_i, y_j) \mapsto (i,j) \in \mathbb{N}^2$ est injective.
$\mathbb{N}^2$ étant dénombrable, il s'ensuit que que $A_1 \times A_2$ est a. p. d. □

Lemme 1.7. *Une union a. p. d. d'ensembles a. p. d. est a. p. d.*

Démonstration. Soient A_n, $n < l$, avec $l = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, des ensembles a. p. d.
Posons $B_0 = A_0$ et, pour $1 \leq n < l$, $B_n = A_n \setminus (\cup_{k=0}^{n-1} A_k)$. Alors les B_n sont d. d. d. et $\cup B_n = \cup A_n$.
On peut écrire $B_n = \{x_i^n\ ;\ i < l_n\}$, d'où tout élément de $A = \cup A_n$ s'écrit de manière unique x_i^n pour un n et pour un i.
L'application $A \ni x_i^n \mapsto (n,i) \in \mathbb{N}^2$ est injective.
Il s'ensuit que A est a. p. d. □

Chapitre 2

Tribus, clans, classes monotones

Exercice 2.1. *Si* $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles* $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{P}(X)$ *telle que chaque* $\mathscr{A}_i$ *soit un clan (ou tribu, ou classe monotone), alors* $\cap_{i\in I}\mathscr{A}_i$ *est un clan (ou tribu, ou classe monotone).*

Proposition 2.1. *Soit* $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$*. Alors il existe un plus petit clan (ou tribu, ou classe monotone)* $\mathscr{B}$ *contenant* $\mathscr{A}$*.*
En d'autres termes, il existe $\mathscr{B}$ *tel que :*
i) $\mathscr{B}$ *soit un clan (ou tribu, ou classe monotone) ;*
ii) $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ *;*
iii) Si $\mathscr{D}$ *est un clan (ou tribu, ou classe monotone) contenant* $\mathscr{A}$*, alors* $\mathscr{B} \subset \mathscr{D}$*.*
$\mathscr{B}$ *est le clan (ou tribu, ou classe monotone)* **engendré par** $\mathscr{A}$ *et est noté respectivement* $\mathscr{C}(\mathscr{A})$*,* $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ *ou* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$*.*

Démonstration. On fait la preuve pour les clans ; preuve identique dans les autres cas.
Soit $\mathscr{F} = \{\mathscr{D}\ ; \mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est un clan$\}$.
$\mathscr{F}$ est non vide (elle contient $\mathscr{P}(X)$).
Si on pose $\mathscr{B} = \cap_{\mathscr{D}\in\mathscr{F}}\mathscr{D}$, alors $\mathscr{B}$ est un clan contenant $\mathscr{A}$ (cf exercice précédent).
Par définition de $\mathscr{F}$, tout clan $\mathscr{D}$ contenant $\mathscr{A}$ est dans $\mathscr{F}$, donc contient $\mathscr{B}$. □

Remarque 2.1. *C'est la même preuve que celle qui donne l'existence du sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel, ou l'existence d'un sous-groupe engendré par une partie d'un groupe, etc.*

Exercice 2.2. *Si* $X = \{1,2,3\}$ *et* $\mathscr{A} = \{\{1\}\}$*, alors :*
a) le clan (et la tribu) engendré par $\mathscr{A}$ *est* $\{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}$ *;*
b) la classe monotone engendrée par $\mathscr{A}$ *est* $\mathscr{A}$*.*

Proposition 2.2. *On a* $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$*.*

Démonstration. Avec $\mathscr{F}$ comme ci-dessus et $\mathscr{G} = \{\mathscr{D}\ ;\ \mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ tribu$\}$, on a $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$, et donc $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \cap_{\mathscr{D}\in\mathscr{F}}\mathscr{D} \subset \cap_{\mathscr{D}\in\mathscr{G}}\mathscr{D} = \mathscr{T}(\mathscr{A})$. □

Exercice 2.3. *Soient $X = \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} = \{\{n\}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que :*
a) $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$;
b) $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \{A \subset \mathbb{N}\ ;\ A$ fini ou A^c fini$\}$.
En déduire que :
c) en général, $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \neq \mathscr{C}(\mathscr{A})$;
d) si $\mathscr{C}$ est un clan et $(A_n) \subset \mathscr{C}$, alors en général $\cup A_n \notin \mathscr{C}$ et $\cap A_n \notin \mathscr{C}$.
e) Montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

Proposition 2.3. *Soit $\mathscr{C}$ un clan. Alors :*
i) $X \in \mathscr{C}$;
ii) si $A,B \in \mathscr{C}$, alors $A \cap B \in \mathscr{C}$;
iii) si $A,B \in \mathscr{C}$, alors $A \setminus B \in \mathscr{C}$;
iv) si $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{C}$, alors $\cup_{j=1}^n A_j \in \mathscr{C}$ et $\cap_{j=1}^n A_j \in \mathscr{C}$.

Démonstration. *i)* on a $X = \emptyset^c$.
ii) découle de l'identité $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.
iii) suit de *ii)* et de $A \setminus B = A \cap B^c$.
iv) se montre par récurrence sur n. □

Proposition 2.4. *Soit $\mathscr{T}$ une tribu. Alors :*
i) $X \in \mathscr{T}$;
ii) si $A,B \in \mathscr{T}$, alors $A \cap B \in \mathscr{T}$;
iii) si $A,B \in \mathscr{T}$, alors $A \setminus B \in \mathscr{T}$;
iv) si $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{T}$, alors $\cup A_n \in \mathscr{T}$ et $\cap A_n \in \mathscr{T}$;
v) si $A_1,\dots,A_n,\dots \in \mathscr{T}$, alors $\cap A_n \in \mathscr{T}$.

Démonstration. *i)-iv)* sont une conséquence de la proposition précédente, car une tribu est un clan.
v) suit de l'identité $\cap A_n = (\cup A_n^c)^c$. □

Proposition 2.5. *Un clan $\mathscr{C}$ qui est aussi une classe monotone est une tribu.*

Démonstration. On doit montrer que, si $(A_n) \subset \mathscr{C}$, alors $\cup A_n \in \mathscr{C}$.
Soit $B_n = \cup_{k=0}^n A_k$. Alors $B_n \nearrow \cup A_k$ et $B_n \in \mathscr{C}$ (car $\mathscr{C}$ est un clan).
$\mathscr{C}$ étant une classe monotone, on trouve $\cup A_n \in \mathscr{C}$. □

Proposition 2.6. *On a $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve de la Proposition 2.2, en remplaçant "clan" par "classe monotone". □

Théorème 2.1. *(***de la classe monotone***) Si $\mathscr{C}$ est un clan, alors $\mathscr{M}(\mathscr{C}) = \mathscr{T}(\mathscr{C})$.*
En particulier, toute classe monotone qui contient $\mathscr{C}$ contient aussi $\mathscr{T}(\mathscr{C})$.

Démonstration. Soit $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{C})$. Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de montrer que (*) $\mathscr{M} \supset \mathscr{T}(\mathscr{C})$.
Par définition de la tribu engendrée, (*) est vraie si on a (**) $\mathscr{M}$ est une tribu.
Pour établir (**), il suffit de montrer que $\mathscr{M}$ est un clan (car clan+classe monotone$\Longrightarrow$tribu).
Posons, pour un A fixé, $\mathscr{M}_A = \{B \in \mathscr{M} \; ; \; A \cup B \in \mathscr{M}\}$. Alors $\mathscr{M}_A$ est une classe monotone. En effet, soit $(B_n) \subset \mathscr{M}_A$ une suite croissante. Alors $A \cup \cup B_n = \cup(A \cup B_n) \in \mathscr{M}_A$, car la suite $(A \cup B_n) \subset \mathscr{M}_A$ est croissante. De même, si $(B_n) \subset \mathscr{M}_A$ est une suite décroissante, alors $A \cup \cap B_n = \cap(A \cup B_n) \in \mathscr{M}_A$.
Si $A \in \mathscr{C}$, alors $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{C}$; d'où $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}$. Autrement dit, l'union d'un élément de $\mathscr{C}$ et d'un élément de $\mathscr{M}$ est un élément de $\mathscr{M}$.
Par conséquent, si $A \in \mathscr{M}$, alors $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{C}$. Il s'ensuit que $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}$. Donc, (***) si $A, B \in \mathscr{M}$, alors $A \cup B \in \mathscr{M}$.
Finalement, soit $\mathscr{N} = \{A \in \mathscr{M} \; ; \; A^c \in \mathscr{M}\}$. Alors $\mathscr{N}$ est une classe monotone. En effet, si $(B_n) \subset \mathscr{N}$ est une suite croissante, alors $(\cup B_n)^c = \cap B_n^c \in \mathscr{N}$, car $(B_n^c) \subset \mathscr{N}$ est une suite décroissante. De même, si $(B_n) \subset \mathscr{N}$ est une suite décroissante, alors $\cap B_n \in \mathscr{M}$.
Comme $\mathscr{N}$ contient $\mathscr{C}$, on trouve $\mathscr{N} = \mathscr{M}$. Autrement dit, (****) si $A \in \mathscr{M}$, alors $A^c \in \mathscr{M}$.
(**) suit de (***) et de (*****). □

Exercice 2.4. *Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{C}(\mathscr{B})$. De même, $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$.*
On a $\mathscr{C}(\mathscr{C}(A)) = \mathscr{C}(A)$. Propriété analogue pour la classe monotone et la tribu engendrées.

2.1 La tribu borélienne

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.1. *La* **tribu borélienne** *$\mathscr{B}_X$ sur X est la tribu engendrée par les ouverts de X.*
Ou encore : $\mathscr{B}_X = \mathscr{T}(\{U \; ; \; U \text{ ouvert de } X\})$.
Si on désigne par τ la topologie de X (=l'ensemble des ouverts de X), alors $\mathscr{B}_X = \mathscr{T}(\tau)$.
Les ensembles de cette tribu sont les **boréliens de** *X.*

Exercice 2.5. *On munit $\mathbb{R}$ de la métrique usuelle. Alors tout intervalle, tout fermé et tout ouvert de $\mathbb{R}$ sont boréliens.*

Remarque 2.2. *Donné X, la question "A est-il un borélien ?" n'a pas de sens, car la tribu borélienne dépend de la distance sur X. C'est la situation rencontrée en Topologie à propos de la question "A*

est-il un ouvert ?".
Néanmoins, il y a un abus fréquent de langage : "$A \subset \mathbb{R}^n$ est borélien" sous-entend que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme.

Proposition 2.7. *a) $\mathscr{B}_X$ est la tribu engendrée par les fermés de X.*
b) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par :
i) les intervalles de $\mathbb{R}$
ou
ii) les intervalles de la forme $]a,\infty[$.
c) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ est engendrée par les **pavés** *$I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, avec I_j intervalle ouvert.*

Démonstration. Notons, dans chaque cas, τ l'ensemble des ouverts, et $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties de X données par l'énoncé (fermé, intervalle, etc).
À chaque fois, on a $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_X$, et donc $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B}_X) = \mathscr{B}_X$. Il reste donc à montrer l'inclusion inverse $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \supset \mathscr{T}(\mathscr{B}_X) = \mathscr{B}_X$.
Pour cela, il suffit de montrer que $\tau \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$, car alors $\mathscr{B}_X = \mathscr{T}(\tau) \subset \mathscr{T}(\mathscr{T}(\mathscr{A})) = \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Soit U un ouvert.
a) On a $U^c \in \mathscr{A}$, d'où $U = (U^c)^c \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
b) i) U est une union a. p. d. d'intervalles ouverts I_j. Comme chaque I_j est dans A, on a $U \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
b) ii) De ce qui précède, il suffit de montrer que tout intervalle ouvert $I =]a,b[$ est dans $\mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = \infty$, c'est clair.
Si $I = \mathbb{R}$, on a $I = \cup_{n\in\mathbb{N}}]-n,\infty[\in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Il reste le cas $b \in \mathbb{R}$.
Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $]a,c] =]a,\infty[\cap]c,\infty[^c \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Il s'ensuit que $]a,b[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}]a,b-1/n] \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
c) Les ouverts de $\mathbb{R}^n$, donc la tribu borélienne, ne dépendent pas de la norme choisie. Nous prenons comme norme $\| \ \|_\infty$.
Soit $\mathscr{C} = \{B(x,r)\ ;\ x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$. Alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$ est a. p. d. En effet, la fonction $B(x,r) \mapsto (x,r) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ est injective et $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ est dénombrable. Il suffit donc de montrer que U est l'union d'une famille de boules de $\mathscr{C}$; cette union sera automatiquement a. p. d.
Posons $\mathscr{D} = \{B(x,r) \in \mathscr{C}\ ;\ B(x,r) \subset U\}$. Clairement, $\cup_{B(x,r)\in\mathscr{D}} B(x,r) \subset U$.
Réciproquement, soit $y \in U$. On doit trouver une boule $B(x,r)$ telle que $B(x,r) \in \mathscr{D}$ et $y \in B(x,r)$.
Il existe un $R > 0$ tel que $B(y,R) \subset U$. Quitte à diminuer R, on peut supposer $R \in \mathbb{Q}$.
Soit $x \in \mathbb{Q}^n$ tel que $\|x-y\|_\infty < r := R/2$. On vérifie aisément que $B(x,r) \subset B(y,R)$ (d'où $B(x,r) \subset U$, ce qui implique $B(x,r) \in \mathscr{D}$) et $y \in B(x,r)$. □

Remarque 2.3. *Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, il existe des parties de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas boréliennes (un exemple, assez difficile, sera vu en TD).*
Ce qu'il faut retenir est que tous les ensembles ne sont pas forcément boréliens. En revanche, tous les ensembles "concrets" le sont.

Exercice 2.6. *Soit* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un homéomporphisme. Si* $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$*, alors* $\Phi(A) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$*.*

Exercice 2.7. *Soient* $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ *et* $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$*. Montrer que* $A \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$*.*

Chapitre 3

Fonctions mesurables

Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace mesurable.

Proposition 3.1. *Soit $f : X \to Y$ et soit $\mathscr{A}$ une famille de parties de Y. Si $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, alors $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ pour tout $A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{D} = \{A \subset Y\ ;\ f^{-1}(A) \in \mathscr{T}\}$.
Alors $\mathscr{D} \supset \mathscr{A}$. Par ailleurs, $\mathscr{D}$ est une tribu. En effet, si $(A_n) \subset \mathscr{D}$, alors $f^{-1}(\cup A_n) = \cup f^{-1}(A_n) \in \mathscr{T}$; vérification analogue des autres propriétés de la tribu.
Il s'ensuit que $\mathscr{D} \supset \mathscr{T}(\mathscr{A})$. □

Définition 3.1. *Une fonction* **étagée** *est une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ de la forme $f = \sum a_i \chi_{A_i}$, où :*
i) il y a un nombre fini de termes dans la somme ;
ii) chaque $a_i \in \mathbb{R}$;
iii) chaque $A_i \in \mathscr{T}$.

Définition 3.2. *Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est* **mesurable** *s'il existe une suite (f_n) de fonctions étagées telle que $f_n \to f$ simplement.*
Dans le cas particulier où (X,d) est un espace métrique et $\mathscr{T}$ est la tribu borélienne, f est appelée **borélienne**.

Remarque 3.1. *On ne peut pas décider si f est mesurable si on ne connaît pas $\mathscr{T}$.*

Exercice 3.1. *Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$ une suite ayant une limite. On a $\lim x_n > a \in \mathbb{R} \iff \exists\ k \in \mathbb{N}^*, \exists\ m \in \mathbb{N}$ tels que $x_n > a + 1/k$, $\forall\ n \geq m$.*

Théorème 3.1. *f est mesurable si et seulement si :*
i) $f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$;
ii) $f^{-1}(-\infty) \in \mathscr{T}$;
iii) $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit (f_n) une suite de fonctions étagées telle que $f_n \to f$.
Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_{n,a} = (f_n)^{-1}(]a,\infty[)$, qui appartient à $\mathscr{T}$ (pourquoi ?).
On a

$$f(x) > a \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } f_n(x) > a + 1/k \text{ pour } n \geq m.$$

En d'autres termes,

$$f(x) > a \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } x \in \cap_{n\geq m} A_{n,a+1/k} \Longleftrightarrow x \in \cup_{k\in\mathbb{N}^*} \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n\geq m} A_{n,a+1/k} \in \mathscr{T}.$$

Donc

$$f^{-1}(]a,\infty]) = \{x\ ;\ f(x) > a\} = \cup_{k\in\mathbb{N}^*} \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n\geq m} A_{n,a+1/k} \in \mathscr{T}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

On obtient $f^{-1}(\{\infty\}) = \cap_n f^{-1}(]n,\infty]) \in \mathscr{T}$.
Par conséquent, $f^{-1}(]a,\infty[) = f^{-1}(]a,\infty]) \setminus f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{T}$.
La Proposition 3.1 combinée avec la partie *b) ii)* de la Proposition 2.7 montre que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
Enfin, $f^{-1}(\{-\infty\}) = X \setminus (f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{T}$.
$\Longleftarrow$ Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \begin{cases} -2^n, & \text{si } f(x) < -2^n \\ 2^n, & \text{si } f(x) \geq 2^n \\ k/2^n, & \text{si } k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n \end{cases}$; ici, k est un entier relatif compris entre -4^n et $4^n - 1$. Formule équivalente pour f : si on pose $A_n = f^{-1}([-\infty,-2^n[)$, $B_n = f^{-1}([2^n,\infty])$ et $C_{n,k} = f^{-1}([k/2^n,(k+1)/2^n[)$, alors $f_n = -2^n \chi_{A_n} + 2^n \chi_{B_n} + \sum_{k=-4^n}^{4^n-1} k/2^n \chi_{C_{n,k}}$.
Chaque f_n est une fonction étagée (pourquoi ?). Par ailleurs, on a $f_n \to f$. $\square$

Si on examine la construction des f_n dans la preuve de l'implication "$\Longleftarrow$", on constate que dans le cas particulier où f est positive, la suite (f_n) est croissante, d'où

Corollaire 3.1. *Toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées.*

Exercice 3.2. *Si (X,d) est un espace métrique et si $\mathscr{T}$ est la tribu borélienne, alors toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est borélienne.*
Plus généralement, si f est continue en dehors d'une partie finie de X, alors f est borélienne.

Exercice 3.3. *Soit $A \subset X$. Alors χ_A est mesurable si et seulement si A l'est.*

Proposition 3.2. *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si on a*

$$\{x \in X\ ;\ f(x) > a\} = f^{-1}(]a,\infty]) \in \mathscr{T} \quad \textit{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Implication vue dans la preuve du Théorème 3.1.
$\Longleftarrow$ On a $f^{-1}(\{\infty\}) = \cap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(]a,\infty]) \in \mathscr{T}$.
Il s'ensuit que $f^{-1}(]a,\infty[) = f^{-1}(]a,\infty]) \setminus f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{T}$, $a \in \mathbb{R}$. La Proposition 3.1 combinée avec la partie *b) ii)* de la Proposition 2.7 implique $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\ B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
Enfin, $f^{-1}(\{-\infty\}) = X \setminus (f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{T}$. □

Théorème 3.2. *Soit $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) chaque f_i est mesurable ;
ii) pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$.
Si l'une de ces deux conditions est satisfaite, f est appelée **mesurable**.
*Cas particulier : $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable$\Longleftrightarrow$*Re *f et* Im *f sont mesurables.*

Démonstration. *i)$\Longrightarrow$ii)* Si $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont des intervalles ouverts, alors $(f_i)^{-1}(I_i) \in \mathscr{T}$.
Il s'ensuit que $f^{-1}(I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n) = \cap (f_i)^{-1}(I_i) \in \mathscr{T}$.
La Proposition 3.1 combinée avec la partie *c)* de la Proposition 2.7 montre que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\ B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
ii)$\Longrightarrow$i) Si $I =]a,\infty[$, alors $(f_i)^{-1}(I) = f^{-1}(\mathbb{R}^{i-1} \times I \times \mathbb{R}^{n-i}) \in \mathscr{T}$. □

3.1 Opérations avec les fonctions mesurables

Proposition 3.3. *Une limite simple de fonctions mesurables est une fonction mesurable.*

Démonstration. Il suffit de copier la preuve du Théorème 3.1 "$\Longrightarrow$". Cette fois-ci, la mesurabilité des $A_{n,a}$ est donnée non pas par le fait que les f_n sont étagées, mais par le Théorème 3.1. □

Proposition 3.4. *Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est borélienne et si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ est mesurable.*
À retenir sous la forme : **borélienne rond mesurable égal mesurable**.

Démonstration. Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^k}$, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathscr{T}$, car $g^{-1}(B) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. □

Exercice 3.4. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.*
a) Montrer que g est borélienne.
b) En déduire que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable et $f \neq 0$, alors $1/f$ est mesurable.
c) Montrer que, si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable et $f \neq 0$, alors $1/f$ est mesurable.

- **Convention :** $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$

Proposition 3.5. *Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont mesurables, alors fg et (si cela a un sens) $f+g$ sont mesurables.*
(On peut définir $f+g$ s'il n'y a pas de point $x \in X$ tel que $f(x) = \pm\infty$ et $g(x) = -f(x)$.)
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est mesurable.

Démonstration. Supposons que $f+g$ ait un sens.
Si f_n, g_n sont des fonctions étagées telles que $f_n \to f$, $g_n \to g$, alors $f_n + g_n$ est étagée (pourquoi ?) et $f_n + g_n \to f + g$.
Soit $F_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$; on définit de même G_n. Définition équivalente : si $A = f^{-1}(\{0\})$, alors $F_n = f_n \chi_{A^c}$. Alors F_n est étagée et $F_n \to f$ (pourquoi ?). La fonction $F_n G_n$ est étagée (pourquoi ?) et $F_n G_n \to fg$ (pourquoi ?).
Finalement, $\lambda f_n \to \lambda f$. □

3.2 Fonctions construites à partir de fonctions mesurables

Dans cette partie, on fixe un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$. Toutes les fonctions considérées sont définies sur X à valeurs $\overline{\mathbb{R}}$ et sont **supposées mesurables**.

Proposition 3.6. $\max(f,g)$ *et* $\min(f,g)$ *sont mesurables.*

Démonstration. On considère deux suites de fonctions étagées, $f_n \to f$, $g_n \to g$. Alors $h_n \to \max(f,g)$ et $k_n \to \min(f,g)$, où $h_n = \max(f_n, g_n)$ et $k_n = \min(f_n, g_n)$.
Il suffit donc de montrer que h_n et k_n sont mesurables, ce qui découle des formules $h_n = 1/2(f_n + g_n + |f_n - g_n|)$ et $h_n = 1/2(f_n + g_n - |f_n - g_n|)$. □

Corollaire 3.2. $\max(f_0, \dots, f_n)$ *et* $\min(f_0, \dots, f_n)$ *sont mesurables.*

Proposition 3.7. $\sup f_n$ *et* $\inf f_n$ *sont mesurables.*

Démonstration. On a $\sup f_n = \lim_{n\to\infty} \max(f_0, \dots, f_n)$, donc $\sup f_n$ est limite d'une suite de fonctions mesurables. Preuve similaire pour inf. □

Proposition 3.8. $\liminf f_n$ *et* $\limsup f_n$ *sont mesurables.*

Démonstration. On considère la liminf ; preuve similaire pour la limsup.
Soit $g_n = \inf_{m \geq n} f_m$, qui est mesurable. Il suffit de se rappeler que $\liminf f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$. □

• **Convention :** Si $A \subset X$ et si $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ (ou $f : A \to \mathbb{R}^n$), on dit que f est mesurable si et seulement si :
i) A est mesurable ;
ii) f étendue par la valeur 0 sur A^c (la même chose : la fonction $f\chi_A$, définie sur X) est mesurable.

Exercice 3.5. *Soit* (X,d) *un espace métrique muni de la tribu borélienne* $\mathscr{B}_X$. *Soient* $A \in \mathscr{B}_X$ *et* $f : A \to \mathbb{R}$ *continue. Alors* f *est mesurable.*

Proposition 3.9. *Soit* A *mesurable. Alors* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable si et seulement si :*
i) $f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$ *;*
ii) $f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$ *;*
iii) $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ *pour tout* $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
De même, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable si et seulement si* $f^{-1}(]a,\infty]) \in \mathscr{T}$, $a \in \mathbb{R}$.
De même, $f : A \to \mathbb{R}^n$ *est mesurable si et seulement si* $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ *si* $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Posons $g = f\chi_A$. Alors (*) $f^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$. Idem pour ii).
Pour iii), il suffit de noter que $f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cap A$, $\forall\ B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
$\Longleftarrow$ De (*), on a $g^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$; de même, $g^{-1}(-\infty) \in \mathscr{T}$.
Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, alors on a : soit $0 \notin B$, et alors $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, soit $0 \in B$, et dans ce cas $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup A^c \in \mathscr{T}$. □

Proposition 3.10. *Soit* $A = \{x \in X\ ;\ (f_n(x)) \text{ converge}\}$. *Alors*
a) A *est mesurable.*
b) Si on pose, pour $x \in A$, $f(x) = \lim f_n(x)$, *alors* f *est mesurable.*

Démonstration. Soient $g = \liminf f_n$, $h = \limsup f_n$, toutes les deux mesurables.
On pose $B = g^{-1}(\infty)$, $C = h^{-1}(-\infty)$, $k = (f - g)\chi_{(B\cup C)^c}$, qui sont mesurables.
Alors $A = k^{-1}(\{0\}) \cup B \cup C$, et donc $A \in \mathscr{T}$.
Sur A, on a $f = g$, et donc $f\chi_A = g\chi_A$, qui est mesurable. □

Chapitre 4

Mesures

Dans cette partie, $(X, \mathscr{T}, \mu)$ est un espace mesuré, et toutes les parties de X considérées **appartiennent à** $\mathscr{T}$. Toutes les propriétés démontrées restent valables si on a une mesure sur un clan, à condition que les unions et intersections considérées soient encore dans le clan.

Proposition 4.1. *On a*
a) Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si, de plus, $\mu(B) < \infty$, alors $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$.
b) $\mu(A_0 \cup \ldots \cup A_k) \leq \sum \mu(A_n)$. Si les A_n sont d. d. d., alors l'inégalité devient égalité.
c) $\mu(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum \mu(A_n)$.
d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$. En particulier, si $\mu(A \cap B) < \infty$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Démonstration. a) On a $B = A \cup (B \setminus A) \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots$, d'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.
Dans le cas particulier où $\mu(B) < \infty$, on a aussi $\mu(B \setminus A) < \infty$, et on trouve $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$.
b) Si on pose $B_0 = A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$, alors les B_n sont d. d. d., $B_n \subset A_n$ et $\cup A_n = \cup B_n$. On a

$$\mu(A_0 \cup \ldots \cup A_k) = \mu(B_0 \cup \ldots \cup B_k \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots) = \sum \mu(B_n) \leq \sum \mu(A_n).$$

Dans le cas particulier où les A_n sont d. d. d., on a $B_n = A_n$, et l'inégalité devient égalité.
c) On copie la preuve de b), sauf qu'il n'y a plus besoin d'ajouter des $\emptyset$.
d) Si $\mu(A) = \infty$, alors $\mu(A \cup B) = \infty$, et l'égalité est claire.
Supposons $\mu(A) < \infty$, ce qui entraîne $\mu(A \cap B) < \infty$.
Alors $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$, d'où $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.
On trouve $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B)$, qui donne l'égalité désirée. □

Proposition 4.2. *On a*
*a) (***théorème de la suite croissante***) Si $A_n \nearrow A$, alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$.*
*b) (***théorème de la suite décroissante***) Si $A_n \searrow A$ et si,* **de plus**, *$\mu(A_0) < \infty$, alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$.*

Démonstration. a) On pose $B_0 = A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Alors les B_n sont d. d. d. et $\cup B_n = A$.
Par ailleurs, on a $A_n = B_0 \cup \ldots \cup B_n$.
On trouve

$$\mu(A) = \sum \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

b) On a $A_0 \setminus A_n \nearrow A_0 \setminus A$, d'où $\lim \mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0 \setminus A)$.
Ceci donne $\mu(A_0) - \mu(A_n) \to \mu(A_0) - \mu(A)$, d'où la conclusion. □

Exercice 4.1. *On considère la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Si $A_n = \{m\ ;\ m \geq n\}$, alors $A_n \searrow \emptyset$, mais $\mu(A_n) \not\to \mu(\emptyset)$.*

4.1 Presque partout

Définition 4.1. *Une propriété $P(x)$ est vraie* **presque partout** *(par rapport à μ, ou encore μ-presque partout, ou encore p. p. ou μ-p. p.) si l'ensemble des $x \in X$ tel que $P(x)$ soit fausse est μ-négligeable.*

Exercice 4.2. *Pour la mesure de comptage, presque partout c'est la même chose que partout.*

Exercice 4.3. *Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g \Longleftrightarrow f = g$ μ-p. p. est une équivalence.*

Définition 4.2. *Une partie A de X est* **négligeable** *si $\mu(A) = 0$.*
(A priori, dans cette définition on ne demande pas à A d'être mesurable.)

4.2 Restrictions

Exercice 4.4. *Soit μ une mesure sur le clan (ou tribu) $\mathscr{C}$.*
a) Si $A \in \mathscr{C}$, alors $\mu_A : \mathscr{C} \to [0,\infty]$, $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$, est une mesure sur $\mathscr{C}$.
b) $\mathscr{C}_A = \{B \in \mathscr{C}\ ; B \subset A\}$ est un clan (ou tribu).
c) La restriction de μ à $\mathscr{C}_A$ est une mesure.

4.3 Finitude

Définition 4.3. *Une mesure μ définie sur un clan (ou tribu) $\mathscr{C}$ est :*
a) **finie** *si $\mu(X) < \infty$ (et alors $\mu(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathscr{C}$) ;*
b) σ-**finie** *s'il existe une suite $(A_n) \subset \mathscr{C}$ telle que :*
i) $X = \cup A_n$;
ii) $\mu(A_n) < \infty$.

Exercice 4.5. *Si μ est σ-finie, on peut choisir les A_n d. d. d.*

Exercice 4.6. *La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ n'est pas finie, mais est σ-finie.*

4.4 La mesure de Lebesgue

Rappelons qu'un pavé dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, avec chaque I_j intervalle. De manière intuitive, on définit la mesure $m(P)$ comme le produit des longueurs des I_j, avec la convention que ce produit vaut 0 si l'une des longueurs vaut 0. L'un des principaux résultats démontrés par la suite est le

Théorème fondamental. *Dans $\mathbb{R}^n$, il existe une unique mesure borélienne (=définie sur les boréliens) ν_n telle que, pour chaque pavé P, on ait $\nu_n(P) = m(P)$.*
Cette mesure est la **mesure de Lebesgue** *dans $\mathbb{R}^n$.*
De plus, cette mesure a les propriétés suivantes :
a) ν_n est donnée par la formule $\nu_n(A) = \inf\{\sum_{j\geq 0} m(P_j)\ ;\ A \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} P_j\}$, pour tout $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$;
b) Si $\mathscr{R}$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ (=transformation qui préserve la distance euclidienne entre deux points de $\mathbb{R}^n$), alors, pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, on a $\nu_n(\mathscr{R} \circ A) = \nu_n(A)$;
c) Si $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$, alors $\nu_{n+m}(A \times B) = \nu_n(A) \cdot \nu_m(B)$.

Chapitre 5

Intégrale

Dans tout ce chapitre, on se donne un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$.

5.1 Fonctions étagées positives

Rappelons qu'une fonction étagée est de la forme (*) $f = \sum a_n \chi_{A_n}$, avec un nombre fini de termes, $a_n \in \mathbb{R}$ et $A_n \in \mathscr{T}$. Introduisons des définitions qui ne serviront que dans cette section : la représentation (*) est :
a) **normale** si les A_n sont d. d. d.,
b) **canonique** si les A_n sont d. d. d. et non vides et si les a_n sont distincts et non nuls.
c) Dans le cas particulier où $f \geq 0$, la représentation (*) est **admissible** si les a_n sont positifs.
Notons qu'à partir d'une représentation normale, on peut obtenir une représentation canonique de la manière suivante : on efface tous les termes qui correspondent à des a_n nuls ou à des A_n vides. Ensuite, on regroupe les termes correspondant à la même valeur de a_n.

Proposition 5.1. *Une fonction étagée admet une représentation canonique. Celle-ci est unique modulo une permutation des termes de la somme. Dans le cas particulier où f est positive, la représentation canonique est admissible.*

Démonstration. Unicité. Si (**) $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$, alors f a, comme valeurs non nulles, précisément les $a_1, \ldots, a_n$; de même, ses valeurs non nulles sont $b_1, \ldots, b_m$. Il s'ensuit que $m = n$ et que les b_i s'obtiennent en permutant les a_i. Quitte à faire une permutation dans la deuxième somme, on a $f = \sum a_i \chi_{C_i}$, où les C_i sont les B_i écrits dans un ordre différent. Comme $f^{-1}(a_i) = A_i = C_i$, on trouve que la deuxième somme de (**) est une permutation de la première.
Existence. Par récurrence sur le nombre de termes dans la représentation de départ $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. S'il y a zéro termes, alors $f = 0$ est une somme de zéro termes.

Passage de $n-1$ à n : on peut écrire $f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}=\sum_{j=1}^m b_j\chi_{B_j}+a_n\chi_{A_n}$, avec les B_j non vides et d. d. d., et les b_j distincts et non nuls. Si $a_n=0$, c'est fini. Si $A_n=\emptyset$, c'est fini aussi. Sinon, on a $f=\sum_{j=1}^m b_j\chi_{B_j\setminus A_n}+a_n\chi_{A_n\setminus\cup B_j}+\sum_{j=1}^m(b_j+a_n)\chi_{B_j\cap A_n}$. Notons que les ensembles dans cette représentation sont d. d. d. Cette représentation est donc normale, et on peut la rendre canonique de la manière décrite précédemment.

Si $f\geq 0$ et si $f=\sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j}$ est la représentation canonique de f, alors les valeurs de f sont $a_1,\ldots,a_n$, et éventuellement 0. Il s'ensuit que les a_j sont ≥ 0. □

Définition 5.1. *Si f est étagée et ≥ 0, de représentation canonique $f=\sum a_j\chi_{A_j}$, alors l'***intégrale de f par rapport à** *μ est $\int_X f\,d\mu=\int f\,d\mu=\int f=\sum a_j\mu(A_j)$.*

Proposition 5.2. *a) Si $f=\sum_{j=1}^m b_j\chi_{B_j}$ est une représentation admissible de f, alors $\int f=\sum b_j\mu(B_j)$.*
b) $\int(f+\lambda g)=\int f+\lambda\int g$, si f,g sont étagées ≥ 0 et si $\lambda\geq 0$.

Démonstration. a) Commençons par le cas où la représentation est normale. On peut supposer $B_j\neq\emptyset$ et $b_j\neq 0$, $\forall\ j$; sinon, on efface les termes correspondant de la représentation, sans affecter la valeur de $\sum b_j\mu(B_j)$.

Alors tous les b_j sont >0. Soit $A=\{b_1,\ldots,b_j\}$. Alors $A=f(X)\setminus\{0\}$ et, si $f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ est la représentation canonique de f, on a $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Si on pose $M_i=\{j\ ;\ B_j\subset A_i\}$, alors $A_i=f^{-1}(a_i)=\cup_{j\in M_i}B_j$, d'où $\mu(A_i)=\sum_{j\in M_i}\mu(B_j)$. On trouve

$$\int f=\sum_i a_i\mu(A_i)=\sum_i a_i\sum_{j\in M_i}\mu(B_j)=\sum_i\sum_{j\in M_i}b_j\mu(B_j)=\sum_j b_j\mu(B_j).$$

Conclusion : l'égalité demandée est vraie si la représentation est normale.

Soit maintenant $f=\sum_{j=1}^m b_j\mu(B_j)$ une représentation admissible. On prouve l'égalité demandée par récurrence sur m.

Pour $m=0$ c'est clair. Passage de $m-1$ à m : on peut représenter canoniquement $\sum_{j=1}^{m-1}b_j\chi_{B_j}=\sum a_i\chi_{A_i}$, et on a $\sum_{j=1}^{m-1}b_j\mu(B_j)=\sum a_i\mu(A_i)$.

Alors $f=\sum a_i\chi_{A_i\setminus B_m}+\sum(a_i+b_m)\chi_{A_i\cap B_m}+b_m\chi_{B_m\setminus\cup A_i}$ est une représentation normale de f.

On a donc $\int f=\sum a_i\mu(A_i\setminus B_m)+\sum(a_i+b_m)\mu(A_i\cap B_m)+b_m\mu(B_m\setminus\cup A_i)$, d'où $\int f=\sum a_i\mu(A_i)+b_m\mu(B_m)=\sum_j b_j\mu(B_j)$.

b) Si $f=\sum a_i\chi_{A_i}$ et $g=\sum b_j\chi_{B_j}$ sont des représentations canoniques, alors $f+\lambda g=\sum a_i\chi_{A_i}+\sum\lambda b_j\chi_{B_j}$ est admissible. On a donc

$$\int(f+\lambda g)=\sum a_i\mu(A_i)+\sum\lambda b_j\mu(B_j)=\int f+\lambda\int g.$$

□

5.2 Fonctions mesurables

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées **mesurables**.

Définition 5.2. *Si $f : X \to [0,\infty]$, alors l'intégrale de f est*

$$\int_X f\,d\mu = \int f\,d\mu = \int f = \sup\{\int u\ ;\ u \text{ étagée et positive et } u \leq f\}.$$

f est **intégrable** *si son intégrale est finie.*

Proposition 5.3. *Dans le cas particulier où f est étagée, cette définition de l'intégrale coïncide avec la précédente.*

Démonstration. Notons $\int f$ l'ancienne intégrale et I la nouvelle. On a $f \leq f \Longrightarrow \int f \leq I$.
Par ailleurs, si $u \leq f$, alors $f = u + (f-u)$, avec $f-u$ étagée positive. On a donc $\int f = \int u + \int (f-u) \geq \int u$. Prenant le sup sur u, on trouve $\int f \geq I$. □

Remarque 5.1. *Si f est mesurable, alors $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = -\min(f,0)$ le sont aussi, et on a $f = f_+ - f_-$.*

Définition 5.3. *f* **a une intégrale** *si $\int f_+ - \int f_-$ a un sens (c'est-à-dire : les intégrales de $f_\pm$ ne valent pas en même temps ∞), et dans ce cas $\int f = \int f_+ - \int f_-$.*
Si f_+ et f_- sont intégrables, alors f est **intégrable***. (Donc f intégrable$\Longleftrightarrow f$ a une intégrale* **finie***).*

Dans le cas où $f \geq 0$, on a $f_+ = f$ et $f_- = 0$; on retrouve donc l'intégrale définie auparavant.

Exercice 5.1. *Soit f une fonction étagée, de représentation canonique $f = \sum a_i \chi_{A_i}$. Si on a $\mu(A_i) < \infty$ pour tout i, alors $\int f = \sum a_i \mu(A_i)$.*

Définition 5.4. $\mathscr{L}^1(X,\mu) = \mathscr{L}^1(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}}\ ; f \text{ intégrable}\}$.

Proposition 5.4. *Si f a une intégrale et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf a une intégrale et on a $\int \lambda f = \lambda \int f$.*

Démonstration. Si $\lambda = 0$, c'est clair. Si $\lambda = -1$, il suffit de remarquer que $(-f)_+ = f_-$ et $(-f)_- = f_+$.
Pour compléter la preuve, il suffit de montrer l'égalité pour $\lambda > 0$. On a alors :
- $(\lambda f)_\pm = \lambda f_\pm$;
- g étagée et positive et $g \leq f_\pm \Longleftrightarrow \lambda g$ étagée et positive et $\lambda g \leq \lambda f_\pm$,

d'où $\int \lambda f_\pm = \lambda \int f_\pm$ et l'égalité voulue. □

Remarque 5.2. *Dans la suite, plusieurs résultats auront comme hypothèse "f a une intégrale". En particulier, ces résultats s'appliquent lorsque $f \geq 0$.*

Proposition 5.5. *Si $f \le g$ et si f, g ont une intégrale, alors $\int f \le \int g$.*

Démonstration. Si f, g sont ≥ 0, l'inégalité est claire à partir de la définition.
En général, on a $f_+ \le g_+$ et $f_- \ge g_-$, d'où $\int f_+ \le \int g_+$ et $\int f_- \ge \int g_-$; puis on soustrait ces deux inégalités. □

Définition 5.5. *Si $A \subset X$ et $f : A \to \overline{R}$ est mesurable, alors f a une intégrale si et seulement si $f\chi_A$ en a une intégrale, et dans ce cas on pose $\int_A f = \int_X f\chi_A$.*

Proposition 5.6. *Si $A \in \mathscr{T}$ est négligeable, alors pour toute fonction mesurable $f : A \to \overline{R}$, on a $\int_A f = 0$.*

Démonstration. Posons $\tilde{f} = f\chi_A$. Si $\tilde{f}$ est étagée positive, alors $\tilde{f} = \sum a_i\chi_{A_i}$, avec $a_i \ge 0$ et $A_i \subset A$. On a alors $\mu(A_i) = 0$, et donc $\int f = 0$.
Si $\tilde{f}$ est positive, alors $\int \tilde{f} = 0$, car cette intégrale est un sup d'intégrales de fonctions étagées positives qui s'annulent en dehors de A.
Il s'ensuit que $\int \tilde{f} = 0$ pour tout f, d'où $\int_A f = 0$ pour tout f. □

5.3 Convergence monotone

Toutes les fonctions de cette partie sont **mesurables**.

Lemme 5.1. *Soit u une fonction étagée positive. Alors l'application $\nu : \mathscr{T} \to [0, \infty]$, $\nu(A) = \int u\chi_A$, est une mesure.*

Démonstration. Notons que ν est bien définie, car $u\chi_A$ est étagée et positive.
Si $u = \sum a_i\chi_{A_i}$ est la représentation canonique de u, alors $u\chi_A = \sum a_i\chi_{A_i \cap A}$ est normale, et donc $\nu(A) = \sum a_i\mu(A_i \cap A)$.
À partir de cette formule, on vérifie aisément que ν est une mesure. □

Exercice 5.2. *Si $f \ge 0$, alors $\int f = \sup\{(1-\varepsilon)\int u\ ;\ u\ \text{ étagée et positive}, u \le f, 0 < \varepsilon < 1\}$.*

Théorème 5.1. *(* **de convergence monotone** *ou* **de Beppo Levi***) Soit (f_n) une suite* **croissante** *de* **fonctions mesurables positives**. *Si $f = \lim f_n$, alors $\int f_n \to \int f$.*
Ou encore : $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Démonstration. f est mesurable et positive ; de plus, on a $f_n \le f$ pour tout n.
Il s'ensuit que $\int f_n \le \int f$. On a aussi $(\int f_n)$ croissante, d'ou $\lim \int f_n \le \int f$.
Au vu de l'exercice précédent, il reste à montrer que, si u est étagée et positive et si $0 < \varepsilon < 1$, alors $\lim \int f_n \ge (1-\varepsilon)\int u$.

Soit $B_n = \{x\,; f_n(x) \geq (1-\varepsilon)u(x)\}$. Comme $\lim f_n = f \geq u$, on a $\cup B_n = X$ (vérifiez séparément quand $u(x) = 0$ et $u(x) > 0$!).
Par ailleurs, $B_n = (f_n - (1-\varepsilon)u)^{-1}([0,\infty]) \in \mathscr{T}$ et la suite (B_n) est croissante, car la suite (f_n) l'est.
Avec ν la mesure du lemme précédent, on trouve, grâce au théorème de la suite croissante, $\nu(B_n) \to \nu(X) = \int u$.
Par ailleurs, on a

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{B_n} \geq \int (1-\varepsilon)u\chi_{B_n} = (1-\varepsilon)\nu(B_n),$$

d'où $\lim \int f_n \geq (1-\varepsilon)\int u$. □

Corollaire 5.1. *Soit $f \geq 0$. Alors, pour toute suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives telle que $f_n \to f$, on a $\int f = \lim \int f_n$.*

5.4 Conséquences du théorème de convergence monotone

Toutes les fonctions de cette partie sont supposées **mesurables**.

Proposition 5.7. *Si f, g ont une intégrale et si $\int f + \int g$ a un sens, alors $f+g$ a une intégrale et $\int(f+g) = \int f + \int g$.*

Démonstration. Commençons par le cas $f, g \geq 0$.
Soient (f_n), (g_n) deux suites de fonctions étagées positives telles que $f_n \nearrow f$ et $g_n \nearrow g$. Alors $f_n + g_n \nearrow f+g$ et donc

$$\int (f+g) = \lim \int (f_n + g_n) = \lim \int f_n + \lim \int g_n = \int f + \int g.$$

Dans le cas général, on a $(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$, d'où $(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+$. On trouve

$$\int (f+g)_+ + \int f_- + \int g_- = \int (f+g)_- + \int f_+ + \int g_+.$$

Si $\int f$, $\int g$ et $\int f + \int g$ ont un sens, alors $\int (f+g)_+ - \int (f+g)_-$ a un sens et on a

$$\int (f+g) = \int (f+g)_+ - \int (f+g)_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_- = \int f + \int g.$$

□

Proposition 5.8. *a) Si f est mesurable, alors $|f|$ l'est.*
b) Si f a une intégrale, alors $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.
c) Si f, g sont mesurables et $f+g$ a une intégrale, alors $\left|\int (f+g)\right| \leq \int |f| + \int |g|$.

Démonstration. a) On a $|f| = f_+ + f_-$.
b) découle de
$$\left|\int f\right| = \left|\int f_+ - \int f_-\right| \le \int f_+ + \int f_- = \int (f_+ + f_-) = \int |f|.$$
c) On a $\left|\int (f+g)\right| \le \int |f+g| \le \int (|f|+|g|) = \int |f| + \int |g|$. □

Proposition 5.9. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ intégrable. Soient $A = f^{-1}(\{\infty\})$, $B = f^{-1}(\{-\infty\})$.*
a) On a $\mu(A) = \mu(B) = 0$.
b) Si on définit $g : X \to \mathbb{R}$, $g = f\chi_{(A\cup B)^c}$, alors $\int |f-g| = 0$. En particulier, on a $\int f = \int g$.

Remarque 5.3. *Définition équivalente de g : $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \text{ est fini} \\ 0, & \text{si } f(x) = \pm\infty \end{cases}$.*
Cette proposition montre donc qu'on peut remplacer sur un ensemble négligeable et sans changer l'intégrale une fonction intégrable par une fonction intégrable qui, de plus, prend uniquement des valeurs finies.

Démonstration. a) On montre, par exemple, la première égalité. On a $f_+ \ge n\chi_A$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, d'où $n\mu(A) \le \int f_+ < \infty$. En faisant $n \to \infty$, on trouve $\mu(A) = 0$.
b) On a $f = g + h$, où $h = \infty\chi_A - \infty\chi_B$. On a donc $\int |h| = 0$, d'où $\int |f-g| = 0$.
Il s'ensuit que $\left|\int f - \int g\right| = \left|\int (f-g)\right| \le \int |f-g| = 0$, d'où $\int f = \int g$. □

Définition 5.6. *Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable. On définit l'intégrale de f uniquement si chaque f_j est intégrable, et alors $\int f = (\int f_j)_{j=1,\ldots,n}$.*
En particulier, si $f : X \to \mathbb{C}$, alors on identifie $\int f = \int Ref + \imath \int Imf$.

Remarque 5.4. *On aurait pu envisager, plus généralement, la situation où $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$. La proposition précédente montre qu'on peut remplacer les f_j par des fonctions $g_j : X \to \mathbb{R}$.*

Théorème 5.2. *Si $f_n \ge 0$ sont des fonctions mesurables, alors $\sum f_n$ l'est et $\int \sum f_n = \sum \int f_n$.*

Démonstration. On pose $g_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n \ge 0$. On a $g_n \nearrow \sum f_n$, ce qui montre que $\sum f_n$ est mesurable.
Par convergence monotone, on trouve
$$\int \sum f_n = \lim \int g_n = \lim(\int f_0 + \int f_1 + \ldots \int f_n) = \sum \int f_n.$$
□

Proposition 5.10. *On suppose que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ a une intégrale.*
a) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $f_{|A}$ a une intégrale.
b) Si $X = A \cup B$, où $A, B \in \mathscr{T}$ sont disjoints, alors $\int f = \int_A f + \int_B f$.
c) Plus généralement, si $X = \cup A_n$, avec les $A_n \in \mathscr{T}$ d. d. d., alors $\int f = \sum_n \int_{A_n} f$.
d) Si $A_n \in \mathscr{T}$ et $A_n \nearrow X$, alors $\int f = \lim \int_{A_n} f$.

Démonstration. f ayant une intégrale, on a soit $\int f_+ < \infty$, soit $\int f_- < \infty$. On va supposer pendant la preuve que $\int f_- < \infty$.
Si $A \in \mathscr{T}$, on note $f_A = f\chi_A$.
a) On a f_A mesurable et $(f_A)_\pm \le f_\pm$. On trouve que $\int (f_A)_- < \infty$, et donc $\int f_A = \int_A f$ a un sens.
b) On a $(f_A)_\pm + (f_B)_\pm = f_\pm$, d'où

$$\int f_\pm = \int (f_A)_\pm + \int (f_B)_\pm = \int_A f_\pm + \int_B f_\pm;$$

on obtient la conclusion en retranchant les deux égalités ainsi obtenues.
c) Il suffit de prouver l'égalité pour $f_\pm$ à la place de f ; ainsi, on peut supposer $f \ge 0$.
On pose $B_n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Alors $B_n \nearrow X$, $B_n \in \mathscr{T}$, et $f_{B_n} \nearrow f$. On trouve

$$\int f = \lim \int f_{B_n} = \lim \int (f_{A_0} + f_{A_1} + \ldots + f_{A_n}) = \lim \left(\int f_{A_0} + \int f_{A_1} + \ldots + \int f_{A_n} \right) = \sum \int_{A_n} f.$$

d) C'est compris dans le calcul précédent. □

5.5 Lien avec les intégrales habituelles

Dans cette partie, μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (autrement dit, le μ de cette section est le ν_1 de la section 4.4).

Proposition 5.11. *Soit $[a,b]$ un intervalle compact et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ par rapport à μ et $\int_{[a,b]} f\,d\mu = \int_a^b f(x)dx$, la dernière intégrale étant l'intégrale usuelle (de Riemann).*

Démonstration. Quitte à remplacer f par $f_\pm$, on peut supposer $f \ge 0$. Soit σ une division de $[a,b]$, déterminée par les points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. On lui associe la "somme inférieure" $s_\sigma = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \min_{[x_{j-1},x_j]} f$.
Si on pose $f_\sigma = \sum_{j=1}^{n-1} \min_{[x_{j-1},x_j]} f \chi_{[x_{j-1},x_j[} + \min_{[x_{n-1},x_n]} f \chi_{[x_{n-1},x_n]}$, alors clairement f_σ est étagée et $s_\sigma = \int f_\sigma d\mu$.
Rappelons les résultats suivants :
• si τ est plus fine que σ (=les points qui déterminent τ contiennent ceux qui déterminent σ), alors $s_\sigma \le s_\tau$ et $f_\sigma \le f_\tau$;
• si on prend une suite (σ_n) de divisions de plus en plus fines et telle que la norme des divisions (=le plus grand des $x_j - x_{j-1}$) tende vers 0, alors $f_{\sigma_n} \to f$ (convergence uniforme) ;
• on a $s_{\sigma_n} \to \int_a^b f(x)dx$.
Si on pose $g_n = f_{\sigma_n} \chi_{[a,b]}$, alors la suite de fonctions étagée positives g_n tend vers $f\chi_{[a,b]}$ en croissant, et on trouve $\int_{[a,b]} f\,d\mu = \lim \int g_n = \lim s_{\sigma_n} = \int_a^b f(x)dx$. □

Proposition 5.12. *Soit I un intervalle non compact d'extrémités a et b. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors :*
a) f est intégrable sur I par rapport à $\mu \Longleftrightarrow$ l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, et dans ce cas $\int_I f d\mu = \int_a^b f(x)dx$;
b) si f est positive, alors $\int_I f d\mu = \int_a^b f(x)dx$;
c) si f a une intégrale sur I, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ existe et vaut $\int_I f d\mu$;
d) si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ existe, alors f n'a pas forcément une intégrale sur I.

Démonstration. Dans toute la preuve, on va prendre $I = [0,\infty[$; les arguments ci-dessous s'adaptent facilement à tous les autres types d'intervalle.
b) On pose $f_n = f\chi_{[0,n]}$, de sorte que $f_n \nearrow f$. Avec la notation $\tilde{g} := g\chi_I$, on a aussi $\tilde{f}_n \nearrow \tilde{f}$. On trouve, par convergence monotone, la proposition précédente et la définition de l'intégrale généralisée,

$$\int_I f d\mu = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n = \lim_n \int_{[0,n]} f d\mu = \lim_n \int_0^n f(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx.$$

a) On a f intégrable sur $I \Longleftrightarrow \int_I f_+ d\mu < \infty$ et $\int_I f_- d\mu < \infty \Longleftrightarrow \int_0^\infty f_+(x)dx < \infty$ et $\int_0^\infty f_-(x) < \infty \Longleftrightarrow \int_0^\infty f(x)dx$ converge absolument, et dans ce cas on a

$$\int_I f d\mu = \int_I f_+ d\mu - \int_I f_- d\mu = \int_0^\infty f_+(x)dx - \int_0^\infty f_-(x)dx = \int_0^\infty (f_+(x) - f_-(x))dx = \int_0^\infty f(x)dx.$$

c) Si f a une intégrale, alors $\int_I f_+ d\mu - \int_I f_- d\mu$ a un sens. On trouve que $\int_0^\infty f_+(x)dx - \int_0^\infty f_-(x)dx$ a aussi un sens. Comme ci-dessus, on obtient l'égalité des deux intégrales.
d) Il suffit de trouver un contre-exemple. On définit f de la manière suivante : pour $k \in \mathbb{N}$, $f(4k) = 0$, $f(4k+1) = 1/(k+1)$, $f(4k+2) = 0$, $f(4k+3) = -1/(k+1)$, et f affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On vérifie aisément que $0 \le \int_0^x f(t)dt \le \dfrac{1}{[x/4]+1}$, et donc $\int_0^\infty f(x)dx = 0$.
Par ailleurs, on a $\int_{[0,4k]} f_+ d\mu = 1 + 1/2 + \ldots + k$, d'où $\int_I f_+ = \infty$. De même, $\int_I f_- d\mu = \infty$. Il s'ensuit que f n'a pas d'intégrale. □

Exercice 5.3. *Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = -(x+n)_-$. Montrer que :*
a) f_n a une intégrale par rapport à μ ;
b) $f_n \nearrow 0$;
c) $\int f_n d\mu \not\to \int 0 \, d\mu$.

5.6 Lien avec les séries

Soit X un ensemble quelconque. On considère sur X la tribu $\mathscr{P}(X)$ et, sur $\mathscr{P}(X)$, la mesure de comptage μ. Alors toute fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable. Nous n'allons donc pas nous intéresser à la mesurabilité dans ce contexte.

5.6.1 X est fini

Dans ce cas, toute fonction est une fonction étagée. On a donc :
a) si $f \geq 0$, alors $f = \sum_{x\in X} f(x)\chi_{\{x\}}$ est admissible. On trouve que $\int f = \sum_{x\in X} f(x)$;
b) si f est de signe quelconque, alors f a une intégrale si est seulement si f ne prend pas en même temps les valeurs $\pm\infty$, et dans ce cas $\int f = \sum_{x\in X} f(x)$;
c) f est intégrable si et seulement si f n'a que des valeurs finies.

5.6.2 $X = \mathbb{N}$

Dans ce cas, on peut identifier une fonction $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Proposition 5.13. *a) Si $f \geq 0$, alors $\int f = \sum a_n$.*
b) f est intégrable si et seulement si $\sum a_n$ est absolument convergente, et dans ce cas $\int f = \sum a_n$.
c) Si f a une intégrale, alors $\sum a_n$ converge et $\int f = \sum a_n$.
d) Si $\sum a_n$ converge, alors f n'a pas forcément une intégrale.

Démonstration. a) Soit $A_n = \{0,\dots,n\} \nearrow \mathbb{N}$. On a $\int f = \lim \int_{A_n} f = \lim \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum a_n$.
b) f est intégrable$\Longleftrightarrow$les intégrales de $f_\pm$ sont finies$\Longleftrightarrow$les séries $\sum(a_n)_\pm$ sont convergentes$\Longleftrightarrow$ la série $\sum |a_n| = \sum((a_n)_+ + (a_n)_-)$ est convergente. Si tel est le cas, alors $\int f = \int f_+ - \int f_- = \sum(a_n)_+ - \sum(a_n)_- = \sum a_n$.
c) Si f a une intégrale, alors l'une des intégrales $\int f_\pm$ est finie. Supposons $\int f_- < \infty$. Alors $\sum(a_n)_- < \infty$, ce qui justifie l'égalité $\sum a_n = \sum(a_n)_+ - \sum(a_n)_- = \int f_+ - \int f_- = \int f$.
d) On prend $a_n = (-1)^n/(n+1)$. Alors $\sum a_n$ converge (série alternée), alors que $\sum(a_n)_+ = \sum(a_n)_- = \infty$. Par conséquent, f n'a pas d'intégrale. □

5.6.3 X dénombrable

Dans ce cas, il existe une bijection $\Phi : \mathbb{N} \to X$. On pose $g = f \circ \Phi : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 5.14. *Si l'une des deux intégrales de cet énoncé existent, alors on a $\int_X f = \int_{\mathbb{N}} g$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $f \geq 0$ (et donc $g \geq 0$).
Soient $A_n = \{0,\dots,n\}$, $B_n = \Phi(A_n)$. Alors $A_n \nearrow \mathbb{N}$, $B_n \nearrow X$, d'où

$$\int_X f = \lim \int_{B_n} f = \lim \sum_{x\in B_n} f(x) = \lim \sum_{n\in A_n} f(\Phi(n)) = \lim \int_{A_n} g = \int_{\mathbb{N}} g.$$

□

5.6.4 Sommation par paquets et convergence commutative

Dans cette partie, X est dénombrable, et $\Phi : \mathbb{N} \to X$ est une bijection. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est supposée avoir une intégrale.
On considère une partition de X, $X = \cup A_n$, avec les A_n d. d. d. (chaque A_n est un "paquet").

Proposition 5.15. *a) On a* $\int_X f = \sum \int_{A_n} f$.
En particulier, si chaque A_n *est fini, alors* $\int_X f = \sum_n \sum_{x \in A_n} f(x)$.
b) Dans le cas particulier $X = \mathbb{N}^2$, *on a*

$$\int_{\mathbb{N}^2} f(m,n) d\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(m,n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m,n).$$

Démonstration. Il suffit de considérer la cas où $f \geq 0$. Alors a) est un cas particulier de la Proposition 5.10.
b) On justifie, par exemple, la première égalité.
Soit $A_n = \{(m,n)\ ;\ m \in \mathbb{N}\}$. Alors $\mathbb{N}^2 = \cup A_n$ et les A_n sont d. d. d. On trouve $\int_{\mathbb{N}^2} f(m,n) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f$. À n fixé, soit $B_m = \{(j,n)\ ;\ 0 \leq j \leq m\}$. Alors $B_m \nearrow A_n$ et $f_{|A_n}$ a une intégrale, d'où $\int_{A_n} f = \lim_m \int_{B_m} f = \lim \sum_{j=0}^{m} f(j,n) = \sum_m f(m,n)$. □

Proposition 5.16. *On a* $\int_X f = \sum_n f(\Phi(n))$.

Démonstration. Ce n'est rien d'autre que l'égalité $\int_X f = \int_{\mathbb{N}} f \circ \Phi$. □

Proposition 5.17. *Soit* (a_n) *une suite telle que la fonction associée* $n \mapsto f(n)$ *ait une intégrale sur* $\mathbb{N}$. *Alors la série* $\sum a_n$ *est* **commutativement convergente** *: pour toute bijection* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *la série* $\sum a_{\varphi(n)}$ *est convergente et* $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_n$.

Démonstration. On a $\int_{\mathbb{N}} f = \int_{\mathbb{N}} f \circ \varphi$, d'où la conclusion. □

Remarque 5.5. *En particulier, cette proposition s'applique :*
a) à des séries à terme positif ;
b) à des séries absolument convergentes.

Chapitre 6

Les grands théorèmes

Dans tout ce chapitre, on se donne un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées sont **mesurables**.

Théorème 6.1. *(***lemme de Fatou***) Soit* (f_n) *une suite de fonctions positives, et soit* $f = \liminf f_n \geq 0$. *Alors* $\int f \leq \liminf \int f_n$.
Ou encore : $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

Démonstration. Soit $g_n = \inf_{m \geq n} f_m$, qui est mesurable, positive et $\leq f_n$. Alors $g_n \nearrow f$, d'où $\int f = \lim \int g_n \leq \liminf \int f_n$. □

Exercice 6.1. *En considérant, sur* $\mathbb{R}$, *les fonctions* $f_n(x) = -(x+n)_-$, *montrer que l'hypothèse* $f_n \geq 0$ *est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou.*

Lemme 6.1. *Si* $|f| \leq g$ *et si* g *est intégrable, alors* f *l'est.*

Démonstration. On a $f_\pm \leq |f| = f_+ f_- \leq g$, d'où $\int f_\pm < \infty$. □

Théorème 6.2. *(***de convergence dominée de Lebesgue***) Soit* (f_n), *avec* $f_n : X \to \mathbb{R}$, *une suite de fonctions telle que :*
(i) il existe une fonction intégrable g *telle que* $|f_n| \leq g$, $\forall\ n$ *;*
(ii) il existe une fonction f *telle que* $f_n \to f$.
Alors f *est intégrable et* $\int |f_n - f| \to 0$.
En particulier, $\int f_n \to \int f$.
Ou encore : $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

Démonstration. f est mesurable et $|f| \leq g$, ce qui montre que f est intégrable.
Soit $A = f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(\infty)$, qui est négligeable. Si $\tilde{h} = h\chi_{A^c}$, il suffit de prouver la conclusion avec

$\tilde{f}_n$, $\tilde{f}$ à la place de f_n, f. Ainsi, on peut supposer f finie.
On pose $g_n = 2g - |f - f_n|$, qui est mesurable et positive. On a $\lim g_n = 2g$, d'où

$$2\int g = \int 2g \leq \liminf \int g_n = \liminf \int (2g - |f - f_n|) = 2\int g - \limsup \int |f - f_n|,$$

d'où $\lim \int |f - f_n| = 0$. □

Exercice 6.2. *En considérant, dans $\mathbb{R}$, la suite $f_n = \chi_{[n,n+1[}$, montrer que l'hypothèse (i) est essentielle.*

Proposition 6.1. *(**inégalité de Tchebychev**) Si f est intégrable et $t > 0$, alors $\mu(\{x\ ;\ |f(x)| > t\}) \leq \int |f|/t$.*

Démonstration. Soit $A = \{x\ ;\ |f(x)| > t\}$. Alors $|f| \geq t\chi_A$, d'où $\int |f| \geq \int t\chi_A = t\mu(A)$. □

Proposition 6.2. *Si f est intégrable et si $\int |f| = 0$, alors $f = 0$ p.p.*

Démonstration. Soit $A_n = \{x\ ;\ |f(x)| > 1/(n+1)\}$, de sorte que $A_n \in \mathscr{T}$ et $\{x\ ;\ f(x) \neq 0\} = \cup A_n$. Il suffit de montrer que $\mu(A_n) = 0$. Cette égalité découle de l'inégalité de Tchebychev. □

Théorème 6.3. *(**réciproque du théorème de convergence dominée**) Soient f_n, f intégrables telles que $\int |f_n - f| \to 0$. Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction intégrable g telles que :*
(i') $|f_{n_k}| \leq g$;
(ii') $f_{n_k} \to f$ p. p.

Démonstration. Posons, pour g, h intégrables, $d(g,h) = \int |g - h|$, qui vérifie l'inégalité triangulaire.
L'hypothèse est $d(f_n, f) \to 0$, et elle implique que (f_n) est une suite de Cauchy pour d.
Il existe donc une sous-suite (f_{n_k}) telle que $d(f_{n_k}, f_{n_l}) \leq 1/2^{l+1}$ si $k \geq l$.
On pose $g = |f_{n_0}| + \sum_{k\geq 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. Alors g est mesurable et $|f_{n_k}| \leq g$ pour tout k.
Par ailleurs, on a

$$\int g = \int |f_{n_0}| + \sum_{k\geq 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \int |f_{n_0}| + \sum_{k\geq 0} 1/2^{k+1} = \int |f_{n_0}| + 1 < \infty.$$

Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $g(x) < \infty$ en dehors de A et $\mu(A) = 0$. Pout tout $x \notin A$, la série $f_{n_0}(x) + \sum_{k\geq 0}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ est absolument convergente, donc convergente. Notons $h(x)$ la somme de cette série, de sorte que $h(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$. Si on pose $\tilde{u} = u\chi_{A^c}$, alors $\tilde{f}_{n_k} \to \tilde{h}$ et $|\tilde{f}_{n_k}| \leq g$. On trouve $\int |\tilde{f}_{n_k} - \tilde{h}| \to 0$. Il s'ensuit que

$$\int |f - \tilde{h}| = \int |\tilde{f} - \tilde{h}| \leq \int |\tilde{f} - \tilde{f}_{n_k}| + \int |\tilde{f}_{n_k} - \tilde{h}| = \int |f - f_{n_k}| + \int |\tilde{f}_{n_k} - \tilde{h}| \to 0,$$

d'où $f = \tilde{h}$ p. p., ou encore $f_{n_k} \to f$ p. p. □

Exercice 6.3. *Si* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $m^2 < n \le (m+1)^2$*, on pose* $A_n = [(n-m^2)/(2m+1), (n+1-m^2)/(2m+1)]$ *et* $f_n = \chi_{A_n} + 1/(n+1)\chi_{[n+1,n+2]}$*. On munit* $\mathbb{R}$ *de la mesure de Lebesgue. Montrer que :*
a) $\int |f_n| \to 0$ *;*
b) il n'existe pas g *intégrable telle que* $|f_n| \le g$ *;*
c) Pour tout $x \in [0,1]$*, on a* $f_n(x) \not\to 0$*.*
En déduire qu'en général il faut passer à une sous-suite afin d'avoir (i') et (ii').

6.1 Hypothèses satisfaites p. p.

Les théorèmes de convergence monotone, dominée et le lemme de Fatou ont des variantes où il suffit que leurs hypothèses respectives soient vérifiées p. p. Nous allons énoncer ces variantes et montrer seulement la dernière. Le principe de la preuve étant toujours le même, nous allons, dans la suite, donner sans preuve des variantes de certains résultats.

Théorème 6.4. *Soit* (f_n) *une suite croissante p. p. de fonctions positives p. p. On définit, là où la limite existe,* $f(x) = \lim f_n(x)$*. Si* $\tilde{f}$ *et le prolongement de* f *par la valeur* 0*, alors* $\lim \int f_n = \int \tilde{f}$*.*

Théorème 6.5. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions positives p. p. Alors* $\int \liminf f_n \le \liminf \int f_n$*.*

Théorème 6.6. *Soit* (f_n)*,* $f_n : X \to \mathbb{R}$*, une suite de fonctions telle que :*
(i''') il existe une fonction intégrable g *telle que* $|f_n| \le g$ *p. p. ;*
(ii''') il existe une fonction mesurable f *telle que* $f(x) = \lim f_n(x)$ *existe p. p.*
Alors $\int |f_n - f| \to 0$*. En particulier,* $\int f_n \to \int f$*.*

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) = 0$ et, en dehors de A, on ait $f_n(x) \to f(x)$ et $|f_n(x)| \le g(x)$. On a $|f(x)| \le g(x)$, $\forall\, x \notin A$. Si on pose $\tilde{h} = f\chi_{A^c}$, alors $\tilde{f}_n = f_n$ p. p., $\tilde{f} = f$ p. p. et $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$. Le théorème de convergence dominée donne $\lim \int |f_n - f| = \lim \int |\tilde{f}_n - \tilde{f}| = 0$. □

6.2 Intégrales dépendant d'un paramètre : continuité

Soit Λ une partie d'un espace métrique (Y, d). Nous considérons des fonctions $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $f = f(x, \lambda)$. La notation $f(\cdot, \lambda)$ désigne la fonction : $X \to \mathbb{R}$ obtenue en fixant λ et en laissant x varier. On définit de même $f(x, \cdot)$.

Théorème 6.7. *On suppose :*
(i) il existe une fonction intégrable g *sur* X *telle que* $|f(\cdot, \lambda)| \le g$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *;*
(ii) la fonction $f(x, \cdot)$ *est continue pour tout* $x \in X$*.*
Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$*,* $F(\lambda) = \int_X f(\cdot, \lambda)\, d\mu$*, est continue.*

Démonstration. Soient $(\lambda_n) \subset \Lambda$, $\lambda \in \Lambda$ tels que $\lambda_n \to \lambda$. On pose $h_n(x) = f(x,\lambda_n)$, $h(x) = f(x,\lambda)$. Alors $|h_n| \le g$ et $h_n \to h$, d'où

$$F(\lambda_n) = \int h_n \to \int h = F(\lambda).$$

□

Exercice 6.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue μ. Montrer que* **la transformée de Fourier** *de f, définie par la formule $\hat{f}(t) = \int e^{-\imath xt} f(x) d\mu(x)$, est une fonction continue et bornée.*

Variante p. p. :

Théorème 6.8. *On suppose :*
(i') il existe une fonction intégrable g sur X telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on ait $|f(x,\lambda)| \le g(x)$ p. p. $x \in X$;
(ii') p. p. $x \in X$, la fonction $f(x,\cdot)$ est continue.
Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$, $F(\lambda) = \int_X f(\cdot,\lambda) d\mu$, est continue.

Dans les applications, on prend souvent $Y = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme et Λ ouvert. Dans ce cas particulier, le théorème 6.7 ne s'applique pas toujours. Une variante plus utile est

Théorème 6.9. *On suppose :*
(i") pour toute boule $\overline{B}(\lambda_0,r) \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable g sur X (qui en principe dépend de $\overline{B}(\lambda_0,r)$!) telle que $|f(\cdot,\lambda)| \le g$ pour tout $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0,r)$;
(ii) la fonction $f(x,\cdot)$ est continue pour tout $x \in X$.
Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$, $F(\lambda) = \int_X f(\cdot,\lambda) d\mu$, est continue.

Démonstration. Sur tout boule $B(\lambda_0,r)$ comme ci-dessus, F est continue. Il s'ensuit que F est continue sur l'union de ces boules, qui est Λ. □

Exercice 6.5. *Si $s > 1$, soit $\zeta(s) = \sum_{n\ge1} 1/n^s$. Montrer que $\zeta :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.*

6.3 Intégrales dépendant d'un paramètre : dérivabilité

Dans cette partie, Λ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme. Nous notons $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j}$. Plus généralement, ∂^α désigne une dérivée partielle par rapport à λ.

Théorème 6.10. *Soit $j \in \{1,\dots,n\}$. On suppose :*
(i) pour tout λ, $f(\cdot,\lambda)$ est intégrable. (La fonction $F(\lambda) = \int f(\cdot,\lambda) d\mu$ est alors bien définie.) ;

(ii) pour tout x, il existe $\partial_j f(x,\cdot)$;
(iii) pour toute boule $\overline{B}(\lambda_0,r) \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable g sur X (qui en principe dépend de $\overline{B}(\lambda_0,r)$ et de j !) telle que $|\partial_j f(\cdot,\lambda)| \le g$ pour tout $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0,r)$.
Alors il existe $\partial_j F$, donnée par $\partial_j F = \int \partial_j f(\cdot,\lambda) d\mu$.
Ou encore : la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée.
Si, de plus, $\partial_j f(x,\cdot)$ est continue, $\forall\ x \in X$, alors $\partial_j F$ est continue.

Démonstration. On fixe $\lambda \in \Lambda$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(\lambda,r) \subset \Lambda$. Pour $|t| < r$, on pose $h(x,t) = \begin{cases} (f(x,\lambda+te_j) - f(x, \\ \partial_j f(x,\lambda), \end{cases}$

de sorte que :
a) à x fixé, $h(x,\cdot)$ est continue ;
b) à t fixé, $h(\cdot,x)$ est mesurable ;
c) (en utilisant le théorème des accroissements finis) $|h(\cdot,t)| \le g$.
Il s'ensuit que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(\lambda+te_j) - F(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \int h(\cdot,t) d\mu = \int h(\cdot,0) d\mu = \int \partial_j f(\cdot,\lambda) d\mu,$$

d'où la conclusion.
Dans le cas particulier où $\partial_j f(x,\cdot)$ est continue, $\forall\ x \in X$, le théorème 6.7 assure la continuité de $\partial_j F$. $\square$

Exercice 6.6. *Montrer que la fonction ζ de l'exercice 6.5 est de classe C^∞.*

Exercice 6.7. *(difficile !) On suppose Λ connexe. Montrer qu'à la place de l'hypothèse (i) on peut mettre*
(i') pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot,\lambda)$ est mesurable et il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $f(\cdot,\lambda_0)$ soit intégrable.

Par récurrence, on trouve

Corollaire 6.1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose :*
(i) pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot,\lambda)$ est intégrable (donc $F(\lambda = \int f(\cdot,\lambda) d\mu$ est bien définie) ;
(ii) pour tout $x \in X$, la fonction $f(x,\cdot)$ est de classe C^k ;
(iii) pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\le k$ et pour toute boule $\overline{B}(\lambda_0,r) \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable g sur X (qui en principe dépend de $\overline{B}(\lambda_0,r)$ et de α !) telle que $|\partial^\alpha f(\cdot,\lambda)| \le g$ pour tout $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0,r)$.
Alors $F \in C^k$ et $\partial^\alpha F(\lambda) = \int \partial^\alpha f(\cdot,\lambda) d\mu$.

6.4 Somme et intégrale

Dans cette partie, on se donne un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$.
Commençons par rappeler que, si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, alors la fonction donnée par $f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & \text{si } \lim f_n(x) \text{ existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ est mesurable.

Théorème 6.11. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que $\sum \int |f_n| < \infty$. Alors :*
(i) pour presque tout x, la série $\sum f_n(x)$ converge ;
(ii) si on pose $f(x) = \begin{cases} \sum f_n(x), & \text{si } \sum f_n(x) \text{ existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, alors f est intégrable et $\int f = \sum \int f_n$.
Ou encore (si $\sum f_n$ existe en tout point) : l'intégrale de la somme est la somme des intégrales.

Démonstration. Soit $g = \sum |f_n|$, qui est positive et mesurable. On a $\int g = \int \sum |f_n| = \sum \int |f_n| < \infty$, d'où g est intégrable.
Il s'ensuit qu'il existe une ensemble négligeable $A \in \mathscr{T}$ tel que $g(x) < \infty$ si $x \in A^c$. Pour $x \in A^c$, la série $\sum |f_n(x)|$ est absolument convergente, donc convergente. Ceci donne (i).
Soit $B = \{x \in X \ ; \ \sum f_n(x) \text{ n'existe pas}\}$, de sorte que $B \in \mathscr{T}$, $B \subset A$. Soit $g_n = \sum_{k=1}^n f_k \chi_B$. Alors $g_n \to f$, g_n est mesurable et $|g_n| \leq \sum |f_k| \leq g$. Le théorème de convergence dominée donne $\int g_n \to \int f$. Par ailleurs, on a $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ p. p., d'où $\int g_n = \sum_{k=1}^n \int f_k$. On trouve $\int f = \sum_{k \geq 1} \int f_k$. □

Chapitre 7

Mesures produit

Dans cette partie, on se donne deux espaces mesurés $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$.

Définition 7.1. *Un pavé de $X \times Y$ est un ensemble de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathscr{T}$ et $B \in \mathscr{S}$.*
Un ensemble élémentaire est une partie de $X \times Y$ qui s'écrit come une union finie de pavés.

Définition 7.2. *La* **tribu produit** *(de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$) est la tribu (sur $X \times Y$) engendrée par les pavés de $X \times Y$.*
Elle est notée $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Proposition 7.1. *On a $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.*

Démonstration. "$\supset$" Un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$ est le produit d'un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ et d'un pavé ouvert de $\mathbb{R}^m$; il appartient donc à $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$ (et d'autant plus à $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$). Il s'ensuit que la tribu engendrée par ces pavés (c'est-à-dire $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$) est contenue dans $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$.
Soit $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} ; A \times \mathbb{R}^m \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}\}$. Alors $\mathscr{A}$ contient les pavés ouverts (car, dans ce cas, $A \times \mathbb{R}^m$ est un pavé ouvert). Par ailleurs, comme $(A \times \mathbb{R}^m)^c = A^c \times \mathbb{R}^m$ et $(\cup A_j) \times \mathbb{R}^m = \cup A_j \times \mathbb{R}^m$, on trouve que $\mathscr{A}$ est une tribu. Il s'ensuit que $\mathscr{A}$ contient la tribu engendrée par les pavés ouverts, c'est-à-dire $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
Conclusion : on a $A \times \mathbb{R}^m \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$ pour tout $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. De même, $\mathbb{R}^n \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$ pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
Si $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$, alors $A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times B) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$. Il s'ensuit que $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$ contient la tribu engendrée par les $A \times B$, avec $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$, c'est-à-dire $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. $\square$

Exercice 7.1. *Si X et Y sont a. p. d., alors $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.*

Dans cette partie, nous allons noter : x un point de X, y un point de Y, $z = (x, y)$ un point de $X \times Y$.

Définition 7.3. *Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. La* **coupe** *de E en x est $E_x = \{y \in Y ; (x, y) \in E\}$. De même, la coupe de E en y est $E_y = \{x \in X ; (x, y) \in E\}$.*

Lemme 7.1. *Soit $\mathscr{C}$ la collection des ensembles élémentaires. Alors $\mathscr{C}$ est un clan. De plus, on a $\mathscr{T}(\mathscr{C}) = \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.*

Démonstration. Clairement, $\mathscr{C}$ est stable par union et contient $\emptyset$. En notant que $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$, on voit facilement que $\mathscr{C}$ est stable par intersection.
Soit $E = \cup A_j \times B_j \in \mathscr{C}$ (l'union comportant un nombre fini de termes, avec $A_j \in \mathscr{T}$, $B_j \in \mathscr{S}$, $\forall\ j$). Alors $E^c = \cap(A_j\times B_j)^c = \cap((A_j)^c \times Y \cup X\times(B_j)^c)$. Ainsi E^c est l'intersection d'éléments de $\mathscr{C}$, donc appartient à $\mathscr{C}$.
Par ailleurs, on a clairement $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$, d'où $\mathscr{T}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$. Comme les pavés sont dans $\mathscr{C}$, la tribu engendrée par les pavés est contenue dans celle engendrée par $\mathscr{C}$, ou encore $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S} \subset \mathscr{T}(\mathscr{C})$. □

Proposition 7.2. *Pour tout x, $E_x \in \mathscr{S}$. De même, pour tout y, $E_y \in \mathscr{T}$.*

Démonstration. On fixe x. Notons $\mathscr{A} = \{E \in \mathscr{T}\otimes\mathscr{S}\ ;\ E_x \in \mathscr{S}\}$. Alors $\mathscr{A}$ contient les produits $A\times B$, avec $A\in\mathscr{T}$, $B\in\mathscr{S}$, car dans ce cas E_x est soit B, soit $\emptyset$.
De plus, $\mathscr{A}$ contient $\mathscr{C}$, car si $E = \cup A_j\times B_j \in \mathscr{C}$, alors $E_x = \cup(A_j\times B_j)_x$.
Par ailleurs, $\mathscr{A}$ est une classe monotone : en effet, si $(E_n)\subset\mathscr{A}$ et $E_n \nearrow E$, alors $E_x = \cup(E_n)_x \in \mathscr{S}$. De même, si $E_n \searrow E$, alors $E_x = \cap(E_n)_x \in \mathscr{S}$.
On trouve que $\mathscr{A}$ contient la classe monotone engendrée par $\mathscr{C}$, qui est $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$.
Conclusion : pour tout $E\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$, on a $E_x\in\mathscr{S}$. □

7.1 Mesure produit

Lemme 7.2. *Tout ensemble de $\mathscr{C}$ s'écrit comme une union finie de produits d. d. d. de la forme $A\times B$, avec $A\in\mathscr{T}$ et $B\in\mathscr{S}$.*

Démonstration. Soit $E = \cup_{j=1}^n A_j\times B_j$, avec $A_j\in\mathscr{T}$, $B_j\in\mathscr{S}$, $\forall\ j$. On raisonne par récurrence sur n, le cas $n=1$ étant clair. On a $X\times Y = E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$, où $E_1 = A_n\times B_n$, $E_2 = (A_n)^c\times B_n$, $E_3 = A_n\times(B_n)^c$, $E_4 = (A_n)^c\times(B_n)^c$. Les E_i sont d. d. d.
On a $E = \cup(E\cap E_i)$. Si on pose $F_i = E\cap E_i$, alors les F_i sont d. d. d., et $F_1 = A_n\times B_n$. Par ailleurs, on a $E_i\cap(A_n\times B_n) = \emptyset$, $i = 2,3,4$, d' où $F_i = \cup_{j=1}^{n-1}(A_j\times B_j)\cap E_i$, $i=2,3,4$. Chaque ensemble $(A_j\times B_j)\cap E_i$ étant de la forme $A\times B$, avec $A\in\mathscr{T}$, $B\in\mathscr{S}$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire F_i, $i = 1,2,3,4$, comme une union d. d. d. de produits $A\times B$. La collection de ces produits est encore d. d. d., et son union est E. □

Lemme 7.3. *Soient $\mathscr{A}$ un clan de parties de T et μ_j, $j=1,2$, deux mesures sur $\mathscr{T}(\mathscr{A})$. Si :*
(i) $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tout $A\in\mathscr{A}$,
(ii) il existe une suite $(A_n)\subset\mathscr{A}$ telle que $\cup A_n = T$ et $\mu_1(A_n)<\infty$ (c'est-à-dire : μ_1 est σ-finie),
alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. En remplaçant au besoin les A_n par $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, on peut supposer $A_n \nearrow T$. Soit $\mu_j^n(A) = \mu_j(A \cap A_n)$, $A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$, de sorte que μ_j^n vérifie (i), est une mesure finie et $\mu_j(A) = \lim \mu_j^n(A)$ (théorème de la suite croissante). Il suffit de montrer que $\mu_1^n = \mu_2^n$, puis on passe à la limite. Ainsi, il suffit de montrer que $\mu_1 = \mu_2$ sous l'hypothèse (i), si μ_i, μ_2 sont finies.
Soit $\mathscr{U} = \{A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})\ ;\ \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Alors $\mathscr{A} \subset \mathscr{U}$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est une classe monotone. Ceci résulte en appliquant à μ_j le théorème de la suite croissante, respectivement le théorème de la suite décroissante (le second étant justifié par le fait que μ_j est finie). □

Théorème 7.1. *On suppose ν σ-finie. Alors, pour tout $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, l'application $X \ni x \mapsto \nu(E_x)$ est μ-mesurable.*
De même, si μ est σ-finie, alors l'application $Y \ni y \mapsto \mu(E_y)$ est ν-mesurable.

Démonstration. Soit f l'application $x \mapsto \nu(E_x)$. Soit $\mathscr{A} = \{E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}\ ;\ f\ \mu-\text{mesurable}\}$.
Dans un premier temps, on suppose ν finie.
Soit d'abord $E \in \mathscr{C}$. On écrit $E = \sum A_j \times B_j$, avec $A_j \in \mathscr{T}$, $B_j \in \mathscr{S}$, les $A_j \times B_j$ étant d. d. d. On voit facilement que $f = \sum \nu(B_j)\chi_{A_j}$, d'où f mesurable. Ainsi, $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$.
Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathscr{A}$ est une classe monotone.
Soit d'abord $(E_n) \subset \mathscr{A}$ une suite croissant vers E. Le théorème de la suite croissante donne $\nu(E_x) = \lim \nu((E_n)_x)$. Ainsi, f est une limite de fonctions μ-mesurables, donc μ-mesurable.
Dans le cas d' une suite décroissante, on peut appliquer le théorème de la suite décroissante (car ν est supposée finie) pour obtenir à nouveau f mesurable.
Enfin, on considère le cas où ν est σ-finie. Soit $(Y_n) \subset \mathscr{S}$ une suite telle que $Y_n \nearrow Y$ et $\nu(Y_n) < \infty$, $\forall\ n$. Si on pose $\nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$, $B \in \mathscr{S}$, alors ν_n est une mesure finie et $\nu(B) = \lim \nu_n(B)$ (théorème de la suite croissante). On a $f(x) = \lim \nu_n(E_x)$, $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, ce qui montre que f est μ-mesurable. □

Théorème 7.2. *On suppose μ et ν σ-finies. Alors il existe sur $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ une mesure et une seule, notée $\mu \otimes \nu$ et appelée le produit des mesures μ et ν, telle que $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, $\forall\ A \in \mathscr{T}, B \in \mathscr{S}$.*

Démonstration. Existence. On pose, avec f comme dans la preuve précédente, pour $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, $\mu \otimes \nu(E) = \int_X f\, d\mu = \int_X \nu(E_x)\mu(x)$. Clairement, $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, $A \in \mathscr{T}, B \in \mathscr{S}$. En particulier, $\mu \otimes \nu(\emptyset) = 0$.
Soit $(E_n) \subset \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ une suite d. d. d. Soit $E = \cup E_n$. Si on pose $f_n(x) = \mu((E_n)_x)$, alors $f = \sum f_n$, car les ensembles $(E_n)_x$ sont d. d. d. On trouve $\mu \otimes \nu(E) = \int f\, d\mu = \int \sum f_n d\mu = \sum \int f_n d\mu = \sum \mu \otimes \nu(E_n)$.
Unicité. Soit λ une mesure avec les mêmes propriétés que $\mu \otimes \nu$. Soient $(C_n) \subset \mathscr{T}$, $(D_n) \subset \mathscr{S}$ telles que $\cup C_n = X$, $\cup D_n = Y$, $\mu(C_n) < \infty$, $\nu(D_n) < \infty$. Alors $\mu \otimes \nu(C_n \times D_n) < \infty$ et $X \times Y = \cup C_n \times D_n$.
Par ailleurs, on a $\mu \otimes \nu(E) = \lambda(E)$, $\forall\ E \in \mathscr{C}$. En effet, on peut écrire $E = \cup A_j \times B_j$, avec $A_j \in \mathscr{T}$, $B_j \in \mathscr{S}$, les $A_j \times B_j$ étant d. d. d. Alors $\mu \otimes \nu(E) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j) = \lambda(E)$.
Le Lemme 7.3 donne $\lambda = \mu \otimes \nu$. □

Par symétrie, on peut consiérer aussi la mesure $E \mapsto \int \mu(E_y) d\nu(y)$. L'unicité de $\mu \otimes \nu$ donne

Corollaire 7.1. *On a* $\mu \otimes \nu(E) = \int \mu(E_y) d\nu(y)$, $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Exercice 7.2. *Si* X, Y *sont a. p. d. et si* μ, ν *sont les mesures de comptage sur* X, Y, *alors* $\mu \otimes \nu$ *est la mesure de comptage sur* $X \times Y$.

7.2 Produits itérés

Plus généralement, on peut considérer plusieurs espaces mesurés $(X_j, \mathscr{T}_j, \mu_j)$, $j = 1, \ldots, k$, et construire (a priori) plusieurs tribus et mesures sur $X_1 \times \ldots \times X_k$. Par exemple, si $k = 3$, on peut considérer les tribus $(\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) \otimes \mathscr{T}_3$ ou $\mathscr{T}_1 \otimes (\mathscr{T}_2 \otimes \mathscr{T}_3)$ et les mesures $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$ ou $\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$. Le résultat est le même, quel que soit l'ordre des opérations. On le montre pour $k = 3$; le cas général s'obtient par récurrence.

Proposition 7.3. *On a* $(\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) \otimes \mathscr{T}_3 = \mathscr{T}_1 \otimes (\mathscr{T}_2 \otimes \mathscr{T}_3)$ *=la tribu engendrée par les produits de la forme* $A_1 \times A_2 \times A_3$, *avec* $A_j \in \mathscr{T}_j$.

Démonstration. Notons $\mathscr{S}_j$, $j = 1, 2, 3$, les trois tribus de l'énoncé. On montre par exemple que $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_3$. Si $A_j \in \mathscr{T}_j$, $j = 1, 2, 3$, alors $A_1 \times A_2 \times A_3 \in \mathscr{S}_1$, d'où $\mathscr{S}_3 \subset \mathscr{S}_1$.
Pour l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $E \times A_3 \in \mathscr{S}_3$ si $E \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ et $A_3 \in \mathscr{T}_3$.
On fixe $A_3 \in \mathscr{T}_3$. Soit $\mathscr{A} = \{E \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 ; E \times A_3 \in \mathscr{S}_3\}$. Clairement, $\mathscr{A}$ est une classe monotone. De plus, elle contient le clan $\mathscr{C}$ engendré par les produits $A_1 \times A_2$, avec $A_1 \in \mathscr{T}_1$, $A_2 \in \mathscr{T}_2$. Donc $\mathscr{A}$ contient $\mathscr{T}(\mathscr{C}) = \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$. □

Proposition 7.4. *Si les mesures* μ_j *sont* σ*-finies,* $j = 1, 2, 3$, *alors* $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$*=l'unique mesure* λ *telle que* $\lambda(A_1 \times A_2 \times A_3) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)$ *pour* $A_j \in \mathscr{T}_j$.

Démonstration. Pour $A_j \in \mathscr{T}_j$, $j = 1, 2, 3$, on a $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3(A_1 \times A_2 \times A_3) = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)(A_1 \times A_2 \times A_3) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)$.
Comme dans la preuve du Théorème 7.2, on conclut grâce au Lemme 7.3. □

Grâce à l'associativité du produit, on peut définir sans ambiguité les produits $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{T}_n$ et $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$. Nous noterons ces produits $\otimes_1^n \mathscr{T}_i$, respectivement $\otimes_1^n \mu_i$.

Remarque 7.1. *Nous verrons plus tard que, si* μ_n *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, *alors* $\mu_n \otimes \mu_m = \mu_{n+m}$ *et, plus généralement,* $\otimes \mu_{n_j} = \mu_{\sum n_j}$.

Les résultats des sections suivantes seront prouvés pour $k = 2$. Néanmoins, il y a des variantes pour $k \geq 3$, que nous allons énoncer sans preuve. Les preuves de ces variantes sont dans l'esprit de celles des deux propositions précédentes.

7.3 Passage aux mesures complétées

On peut, à partir de $(X,\mathscr{T},\mu)$ et $(Y,\mathscr{S},\nu)$:
(i) compléter $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ par rapport à $\mu\otimes\nu$, et prendre, sur $\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$, la mesure complétée $\overline{\mu\otimes\nu}$;
(ii) compléter d'abord $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$, μ, ν, puis considérer la tribu et la mesure produit. Ceci donne la tribu $\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}$ et la mesure $\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}$;
(iii) après avoir fait (ii), compléter la tribu et la mesure ainsi construites. On obtient ainsi la tribu $\overline{\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}}$ et la mesure $\overline{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}$.
Clairement, la tribu de (iii) contient celle de (ii), et la mesure de (iii) étend celle de (ii).

Théorème 7.3. *Si μ, ν sont σ-finies, alors (i) et (iii) donnent les mêmes tribus, respectivement mesures.*
Par conséquent, il sufit de compléter après avoir fait le produit.

Démonstration. Clairement, on a $\mathscr{T}\subset\overline{\mathscr{T}}$, $\mathscr{S}\subset\overline{\mathscr{S}}$ et $\mu\otimes\nu=\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}$ sur $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$, d'où $\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}\subset\overline{\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}}$.
Par ailleurs, on voit facilement à partir de la définition que $\overline{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}$ est une extension de $\overline{\mu\otimes\nu}$.
Inversement, soit $E\in\overline{\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}}$. Alors il existe $E_1,E_2\in\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}$ tels que $E_1\subset E\subset E_2$ et $\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(E_2\setminus E_1)=0$. De plus, on a $\overline{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}(E)=\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(E_1)=\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(E_2)$.
Il suffit de montrer (*) qu'il existe $F_1,F_2\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ tels que $F_1\subset E_1\subset E\subset E_2\subset F_2$ et $\mu\otimes\nu(F_2\setminus F_1)=0$.
En efet, si tel est le cas, alors il s'ensuit à la fois que $E\in\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$ et que

$$\overline{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}(E)=\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(E_1)\geq\mu\otimes\nu(F_1)=\overline{\mu\otimes\nu}(E)=\mu\otimes\nu(F_2)\geq\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}(E_2)=\overline{\overline{\mu}\otimes\overline{\nu}}(E),$$

ce qui donne le résultat.
Retournons à la preuve de (*).
Il suffit de montrer que (**) pour tout $G\in\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}$, il existe $G_1,G_2\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ tels que $G_1\subset G\subset G_2$ et $\mu\otimes\nu(G_2\setminus G_1)=0$. En effet, si (**) est vraie, alors il existe $H_1,H_2,I_1,I_2\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ tels que $H_1\subset E_1\subset H_2$, $I_1\subset E_2\subset I_2$, $\mu\otimes\nu(H_2\setminus H_1)=0$, $\mu\otimes\nu(I_2\setminus I_1)=0$. On prend alors $F_1=H_1$, $F_2=I_2$, de sorte que $F_1\subset E_1\subset E_2\subset F_2$. De plus, on a

$$\mu\otimes\nu(F_2\setminus F_1)=\mu\otimes\nu((I_2\setminus E_2)\cup(E_2\setminus E_1)\cup(E_1\setminus H_1))\leq\mu\otimes\nu(I_2\setminus I_1)+\mu\otimes\nu(E_2\setminus E_1)+\mu\otimes\nu(H_2\setminus H_1)=0,$$

ce qui donne (*).
Prouvons (**). Soit $\mathscr{A}=\{G\in\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}\ ;\ (**)\text{ est vraie pour } G\}$. Clairement, $\mathscr{A}$ est une classe monotone : par exemple, si $G^k\nearrow G$, avec $G^k\in\mathscr{A}$, soient $G_1^k,G_2^k\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ tels que $G_1^k\subset G^k\subset G_2^k$ et $\mu\otimes\nu(G_2^k\setminus G_1^k)=0$. Alors $\cup G_1^k\subset G\subset\cup G_2^k$ et $\mu\otimes\nu(\cup G_2^k\setminus\cup G_1^k)\leq\sum\mu\otimes\nu(G_2^k\setminus G_1^k)=0$; la même inégalité est vraie si $G^k\searrow G$.
Par ailleurs, $\mathscr{A}$ contient le clan $\overline{\mathscr{C}}$ engendré par les produits $A\times B$, avec $A\in\overline{\mathscr{T}}$, $B\in\overline{\mathscr{S}}$. En effet, si $G\in\overline{\mathscr{C}}$, alors on peut écrire $G=\cup A^j\times B^j$, avec $A^j\in\overline{\mathscr{T}}$, $B^j\in\overline{\mathscr{S}}$, l'union étant d. d. d. et finie. Si

$A_1^j, A_2^j \in \mathscr{T}$, $B_1^j, B_2^j \in \mathscr{S}$ sont tels que $A_1^j \subset A^j \subset A_2^j$, $B_1^j \subset B^j \subset B_2^j$, $\mu(A_2^j \setminus A_1^j) = 0$, $\nu(B_2^j \setminus B_1^j) = 0$, alors les $A_1^j \times B_1^j$ sont d. d. d. et $\cup A_1^j \times B_1^j \subset G \subset \cup A_2^j \times B_2^j$. De plus, on a $(\cup A_2^j \times B_2^j) \setminus (\cup A_1^j \times B_1^j) \subset \cup((A_2^j \setminus A_1^j) \times B_2^j \cup A_2^j \times (B_2^j \setminus B_1^j))$, d'où

$$\mu \otimes \nu((\cup A_2^j \times B_2^j) \setminus (\cup A_1^j \times B_1^j)) \leq \sum \mu \otimes \nu((A_2^j \setminus A_1^j) \times B_2^j) + \sum \mu \otimes \nu(A_2^j \times (B_2^j \setminus B_1^j)) = 0,$$

ce qui montre que $G \in \mathscr{A}$.
Il s'ensuit que $\mathscr{A} = \overline{\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}}$, d'où la conclusion. □

On prouve de même le résultat suivant

Théorème 7.4. *Si les μ_i sont σ-finies, alors on a $\overline{\otimes_{i=1}^n \mathscr{T}_i} = \overline{\otimes_{i=1}^n \overline{\mathscr{T}}_i}$ et $\overline{\otimes_{i=1}^n \mu_i} = \overline{\otimes_{i=1}^n \overline{\mu}_i}$.*

Corollaire 7.2. *On a $\overline{\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m} = \mathscr{L}_{n+m}$ et $\overline{\lambda_n \otimes \lambda_m} = \lambda_{n+m}$.*
De même, on a $\overline{\otimes_{i=1}^n \mathscr{L}_1} = \mathscr{L}_n$ et $\overline{\otimes_{i=1}^n \lambda_1} = \lambda_n$.

Démonstration. On prouve les deux premières propriétés. Si μ_n est la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, alors $\lambda_n = \overline{\mu_n}$ et $\mathscr{L}_n = \overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}}$. Compte tenu du fait que $\mu_n \otimes \mu_m = \mu_{n+m}$, on a $\overline{\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m} = \overline{\overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}} \otimes \overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}}} = \overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}} = \overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}} = \mathscr{L}_{n+m}$.
De plus, $\overline{\lambda_n \otimes \lambda_m} = \overline{\overline{\mu}_n \otimes \overline{\mu}_m} = \overline{\mu_n \otimes \mu_m} = \overline{\mu_{n+m}} = \lambda_{n+m}$. □

7.4 Les grands théorèmes pour $\mu \otimes \nu$

Dans cette partie, on se donne deux espaces mesurés $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$, avec μ et ν σ-finies et on munit $X \times Y$ de la tribu produit $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ et de la mesure produit $\mu \otimes \nu$.

Proposition 7.5. *Soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$-mesurable. Alors, pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, les fonctions partielles $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_y : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_x = f(x, \cdot)$, $f_y = f(\cdot, x)$, sont $\mathscr{T}$-, respectivement $\mathscr{S}$-mesurables.*

Démonstration. Il suffit de le montrer quand f est étagée. Le cas général s'obtient par passage à la limite, en utilisant : a) le fait que toute fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées ; b) le fait qu'une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.
Par linéarité des appplications $f \mapsto f_x$, respectivement $f \mapsto f_y$, il suffit de consiérer le cas où $f = \chi_E$, avec $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Dans ce cas, on a $f_x = \chi_{E_x}$ et $f_y = \chi_{E_y}$, et la conclusion est claire. □

Remarque 7.2. *De même, si on considère un produit de plusieurs facteurs, les applications partielles obtenues en figeant une partie des variables d'une fonction mesurable f sont mesurables. Par exemple : si $f : \prod_{i=1}^4 X_i$ est $\otimes_{i=1}^4 \mathscr{T}_i$-mesurable, alors l'application $f_{x_1,x_2} = f(x_1, x_2, \cdot, \cdot) : X_3 \times X_4 \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mathscr{T}_3 \otimes \mathscr{T}_4$-mesurable.*

Théorème 7.5. *(***de Tonelli***) Soit $f : X\times Y \to [0,\infty]$ $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$-mesurable. Alors la fonction $y\mapsto \int_X f(\cdot,y)d\mu$ est ν-mesurable. De plus, on a*

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)d\mu(x)\Big)d\nu(y).$$

De même, l'application $x\mapsto \int_Y f(x,\cdot)d\nu$ est μ-mesurable et on a

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x).$$

Démonstration. Il suffit de montrer les conclusion du théorème quand $f=\chi_E$, avec $E\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$. En effet, ceci va impliquer (par linéarité) que le théorème est vrai si f est étagée et positive. Pour f quelconque, on considère une suite (f_n) de fonctions étagées telle que $f_n\geq 0$, $f_n\nearrow f$. Par convergence monotone, on trouve : $\int_X f_n(x,y)d\mu(x)\to\int_X f(x,y)d\mu(x)$, d'où $y\mapsto\int_X f(\cdot,y)d\mu$ est ν-mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). À nouveau par convergence monotone, on trouve :

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \lim\int_{X\times Y} f_n\,d\mu\otimes\nu = \lim\int_Y\int_X f_n(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Si $f=\chi_E$, le résultat à montrer n'est rien d'autre que le Théorème 7.1. □

Corollaire 7.3. *Si $f : X\times Y\to\mathbb{R}$ est mesurable, alors f est intégrable si et seulement si $\int_Y\int_X |f(x,y)|d\mu(x)d\nu(y) <$ ∞ (ou $\int_X\int_Y |f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)<\infty$).*

Démonstration. Par le théorème précédent, on $\int_{X\times Y}|f|\,d\mu\otimes\nu = \int_Y\int_X |f(x,y)|d\mu(x)d\nu(y)$. □

Théorème 7.6. *(***de Fubini***) Soit $f : X\times Y\to\mathbb{R}$ intégrable. Alors :*
a) pour ν-presque tout y, la fonction $f(\cdot,y)$ est intégrable ;
b) si on pose $g(y)=\begin{cases}\int_X f(\cdot,y)d\mu, & \text{si cette intégrale existe}\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$, alors g est intégrable ;
c) on a

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_Y g(y)d\nu(y).$$

Mêmes conclusions si on échange les rôles de x et y.

Démonstration. On applique le théorème précédent à f_+ et f_-. Ceci implique que les fonctions $y\mapsto \int_X f_\pm(\cdot,y)d\mu$ sont intégrables, donc finies p. p. Si $B=\{y\in Y\ ;\ \int_X f_\pm(\cdot,y)d\mu=\infty\}$, alors $\nu(B)=0$ et $\int_X f(\cdot,y)d\mu$ est définie si et seulement si $y\notin B$. On trouve $g(y)=\chi_{B^c}(y)(\int_X f_+(\cdot,y)d\mu-\int_X f_-(\cdot,y)d\mu)$,

d'où g est mesurable.
Comme $\mu\otimes\nu(X\times B)=0$, on a

$$\int_{X\times Y} f_\pm\, d\mu\otimes\nu = \int_{X\times(Y\setminus B)} f_\pm\, d\mu\otimes\nu = \int_{Y\setminus B}\int_X f_\pm(\cdot,y)d\mu d\nu(y).$$

En ajoutant ces deux égalités, on trouve

$$\int_{Y\setminus B}|g(y)|d\nu(y) \le \int_{Y\setminus B}\int_X |f(\cdot,y)|d\mu d\nu(y) = \int_{Y\setminus B}\int_X (f_+(\cdot,y)+f_-(\cdot,y))d\mu d\nu(y) < \infty,$$

d'où g est intégrable sur $Y\setminus B$, donc sur Y.
En particulier, g est finie ν-presque partout, d'où $f(\cdot,y)$ est intégrable pour ν-presque tout y.
Enfin, en retranchant les égalités obtenues pour $f_\pm$ on trouve

$$\int_Y g d\nu = \int_{Y\setminus B} g = \int_{Y\setminus B}\int_X (f_+(\cdot,y)-f_-(\cdot,y))d\mu d\nu(y) = \int_{X\times(Y\setminus B)} f d\mu\otimes\nu = \int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu.$$

□

Remarque 7.3. *Les théorèmes de Tonnelli et Fubini ont des variantes où on prend un produit de plusieurs facteurs. Exemple : si* $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ *est borélienne et positive, alors les fonctions* $(x_2,\dots,x_n)\mapsto\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)d\lambda_1(x_1)$, $(x_3,\dots,x_n)\mapsto\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)d\lambda_1(x_1)d\lambda_1(x_2)$, *et ainsi de suite, sont boréliennes, et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)d\lambda_1(x_1)d\lambda_1(x_2)\dots d\lambda_1(x_n).$$

7.5 Les grands théorèmes pour $\overline{\mu\otimes\nu}$

Proposition 7.6. *Soit* $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$*-mesurable. Alors pour presque tout* $x\in X$ *et* $y\in Y$*, les fonctions* f_x *et* f_y *sont* $\overline{\mathscr{T}}$*-, respectivement* $\overline{\mathscr{S}}$*-mesurables.*

Démonstration. Il suffit de le montrer quand $f=\chi_E$, avec $E\in\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$. En effet, si la résultat est vrai dans ce cas, il est vrai pour les fonctions $\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$-étagées, puis, par passage à la limite, pour les fonctions $\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$-mesurables. (Au cours du passage à la limite, on utilise le fait que l'union d'une suite d'ensembles négligeables est négligeable.
Soit $E\in\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$. Il existe $E_1,E_2\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ tels que $E_1\subset E\subset E_2$ et $\mu\otimes\nu(E_2\setminus E_1)=0$. Soit $F=E_2\setminus E_1$.
À x fixé, on a $(\chi_E)_x=(\chi_{E_1})_x$ en dehors de l'ensemble F_x. Donc $(\chi_E)_x$ est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable si ce dernier ensemble est ν-négligeable.
Ainsi, il suffit de montrer que, si $F\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ est $\mu\otimes\nu$-négligeable, alors F_x est ν-négligeable pour presque tout x. Ceci résulte de la formule qui donne $\mu\otimes\nu$: $0=\mu\otimes\nu(F)=\int_X\nu(F_x)d\mu(x)$. La fonction $x\mapsto\nu(F_x)$ étant positive et mesurable, on trouve $\nu(F_x)=0$ μ-p. p. □

Remarque 7.4. *Si λ est une mesure complète sur $(T,\mathscr{A})$, et si g est une fonction définie p. p. sur T, on peut parler de la mesurabilité de g (même si on ne connaît pas précisément son domaine de définition). En effet, soit h n'importe quel prolongement de g à T (par exemple, le prolongement par la valeur 0). Si h est mesurable, alors n'importe quel autre prolongement de g est mesurable, car égal à h presque partout. Dans ce cas, nous appellerons g mesurable. De même, on dira que g a une intégrale si h en a une ; à nouveau, cette propriété ne dépend pas du choix de h. Dans ce cas, nous posons $\int g d\lambda = \int h d\lambda$; cette quantité ne dépend pas du choix de h.*
Avec cette convention, la conclusion du théorème de Fubini s'écrit plus simplement $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_Y\int_X f(\cdot,y)d\mu d\nu(y)$.
On voit facilement que si g est limite p. p. d' une suite de fonctions définies p. p. et mesurable, alors g est mesurable.

Théorème 7.7. *(**de Tonnelli**) Soit $f : X\times Y \to [0,\infty]$ $\overline{\mu\otimes\nu}$-mesurable. Alors l'application $y\mapsto \int_X f(x,y)d\overline{\mu}(x)$ (définie ν-p. p.) est $\overline{\nu}$-mesurable et*

$$\int_{X\times Y} f\, d\overline{\mu\otimes\nu} = \int_Y\int_X f(x,y)d\overline{\mu}(x)d\overline{\nu}(y).$$

Énoncé analogue si on échange les rôles de x et de y.

Démonstration. Commençons par le cas $f=\chi_E$, avec $E\in\overline{\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}}$. Au vu de la preuve de la proposition précédente, on a (avec les notations de cette preuve), $\int_X(\chi_E)_y d\mu = \mu((E_1)_y)=\overline{\mu}(E_y)$ pour presque tout y. Ceci donne la mesurabilité de $y\mapsto\int_X(\chi_E)_y d\mu$. De plus, on a

$$\int_{X\times Y}\chi_E d\overline{\mu\otimes\nu} = \overline{\mu\otimes\nu}(E) = \mu\otimes\nu(E_1) = \int_Y \mu((E_1)_y)d\nu(y) = \int_Y\int_X \chi_E(x,y)d\overline{\mu}(x)d\overline{\nu}(y),$$

ce qui prouve que le théorème est vrai si $f=\chi_E$.
Le cas d'une fonction étagée positive suit par linéarité, en notant qu'une somme finie de fonctions positives g_j définies p. p. est encore définie p. p., que si les les g_j sont mesurables (au sens de la remarque précédente) alors leur somme l'est, enfin que l'intégrale de la somme est la somme des intégrales (pour des fonctions définies p. p., positives et mesurables).
Enfin, le cas où f est quelconque s'obtient en considérant une suite croissante de fonctions étagée et positives telle que $f_n\nearrow f$. On conclut en utilisant : a) le fait que $y\mapsto\int_X f(x,y)d\mu(x)$ est la limite de $y\mapsto\int_X f_n(x,y)d\mu(y)$ là où toutes ces fonctions sont définies, c'est-à-dire p. p. ; b) que, par conséquent, $y\mapsto\int_X f(x,y)d\mu(x)$ est mesurable, comme limite p. p. de fonctions mesurables définies p. p. ; c) le théorème de convergence monotone, variante p. p. $\square$

Théorème 7.8. *(**de Fubini**) Soit $f : X\times Y\to\overline{R}$ $\overline{\mu\otimes\nu}$-intégrable. Alors :*
a) pour $\overline{\nu}$-presque tout y, $f(\cdot,y)$ est $\overline{\mu}$-intégrable ;

b) si on pose $g(y) = \begin{cases} \int_X f(\cdot, y) d\overline{\mu}, & \text{si cette intégrale existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$*, alors g est* $\overline{\nu}$*-intégrable ;*

c) on a

$$\int_{X\times Y} f\, d\overline{\mu\otimes\nu} = \int_Y g(y) d\overline{\nu}(y).$$

Mêmes conclusions si on échange les rôles de x et y.

La preuve est identique à celle du théorème de Fubini pour $\mu\otimes\nu$.

Remarque 7.5. *Ces théorèmes ont des variantes que le lecteur ennoncera facilement dans le cas de plusieurs facteurs.*

Nous concluons ce chapitre par une application du théorème de Tonnelli.

Proposition 7.7. *Soit H un hyperplan de* $\mathbb{R}^n$. *Alors* $\lambda_n(H) = 0$.
En particulier, si A est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$*, alors* $\lambda_n(A) = 0$.

Démonstration. Par récurrence sur n. Si $n = 1$, H est un point, et la conclusion est claire.
Passage de $n-1$ à n : si H est parallèle à l'hyperplan de coordonnées $H_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n = 0\}$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{a\}$, d'où $\lambda_n(H) = \lambda_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})\lambda_1(\{a\}) = 0$.
Sinon, on considère la coupe $H_{x_n} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ ; \ (x', x_n) \in H\}$. Elle est de même dimension que $\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; (x', x_n) \in H\}$; or, cet ensemble est égal à $H \cap H'$, où $H' = H + x_n e_n$ (e_n est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Le théorème de la dimension donne $\dim(H\cap H') = \dim H + \dim H' - \dim(H + H')$. H et H' étant deux hyperplanes qui ne sont pas parallèles, on a $H + H' = \mathbb{R}^n$, d'où $\dim H_{x_n} = n-2$.
On a alors $\lambda_n(H) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(H_{x_n}) d\lambda_1(x_n) = 0$. □

Chapitre 8

Changements de variables

8.1 Un peu d'algèbre linéaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On peut ramener A à l'identité par la méthode du pivot de Gauss. Chaque étape de la méthode de Gauss est l'une des suivantes :
a) on permute deux colonnes de A (à la recherche d'un pivot) ;
b) on multiplie l'une des colonnes de A par une constante $c \neq 0$, puis on la retranche d'une autre.
Si on récrit ces opérations en termes matriciels, alors a) revient à multiplier A à droite par une matrice P_{ij}, qui s'obtient de l'identité en permutant les colonnes i et j. b) revient à multiplier d'abord A à droite par la matrice $Q_{i,c}$ qui s'obtient de l'identité en multipliant la colonne i par c, puis multiplier le résultat à droite par la matrice R_{ij} qui s'obtient de l'identité en retranchant la colonne i de la colonne j, enfin multiplier ce dernier résultat à droite par $Q_{i,1/c}$.
Ainsi, l'identité s'écrit comme un produit fini de la forme $I = AS_1S_2 \ldots S_m$, où chaque S_k est un P_{ij} ou un $Q_{i,c}$ ou un R_{ij}. On trouve $A = S_m^{-1} \ldots S_1^{-1}$. On a $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $Q_{i,c}^{-1} = Q_{i,1/c}$, $R_{ij}^{-1} = T_{ij}$, où T_{ij} s'obtient de l'identité en ajoutant la colonne i à la colonne j.
On vient de prouver le résultat suivant :

Proposition 8.1. *Toute matrice inversible est produit de matrices de type P_{ij}, $Q_{i,c}$ et T_{ij}.*

8.2 Changements de variables linéaire

Théorème 8.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors :*
a) $E \subset \mathbb{R}^n$ est borélien (respectivement Lebesgue mesurable) si et seulement si $A(E)$ l'est ;
b) si tel est le cas, alors $\lambda_n(A(E)) = |\text{dét } A| \lambda_n(E)$.

Démonstration. On a $E = A^{-1}(A(E))$, donc si $A(E)$ est borélien, E l'est aussi. De même, on a $A(E) = (A^{-1})^{-1}(E)$, donc $A(E)$ est borélien si E l'est.
Soit $C = [0,1]^n$. C étant d'intérieur non vide et A étant un homéomorphisme, $A(C)$ est d'intérieur non vide. Il s'ensuit que $A(C)$ contient un pavé ouvert non vide, d'où $\lambda_n(A(C)) = k = k_A > 0$. On pose $\mu(E) = \lambda_n(A(E))/k$, $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. On va montrer que μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, d'où $\lambda_n(A(E)) = k\lambda_n(E)$, $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
Clairement, μ est une mesure, car si (E_n) est une suite d. d. d. de boréliens, alors $(A(E_n))$ est une suite d. d. d. de boréliens. Par construction, on a $\mu(C) = 1 = \lambda_n(C)$. Enfin, μ est invariante par translations, car $\mu(E+x) = \lambda_n(A(E+x))/k = \lambda_n(A(E)+Ax)/k = \lambda_n(A(E))/k = \mu(E)$. On verra plus tard que la seule mesure borélienne invariante par translations et telle que la mesure du cube unité soit égale à 1 est la mesure de Lebesgue sur les boréliens. Donc $\mu = \lambda_n$.
Ensuite, on montre l'égalité (*) $k_A = |\text{dét}\, A|$ (qui permet de conclure).
Dans un premier temps, on a $k_{AB} = k_A k_B$. En effet, on a $k_{AB} = \lambda_n(AB(C)) = k_A\lambda_n(B(C)) = k_A k_B \lambda_n(C) = k_A k_B$.
Par ailleurs, on a aussi $|\text{dét}(AB)| = |\text{dét}\, A||\text{dét}\, B|$. Compte tenu de la proposition précédente, il suffit alors de montrer (*) quand A est l'une des matrices P_{ij}, $Q_{i,c}$ ou T_{ij} (puis on multiplie ces égalités pour obtenir (*) pour A quelconque).
Si $A = P_{ij}$, alors $|\text{dét}\, A| = 1$ et $A(C) = C$, d'où $k_A = 1$.
Si $A = Q_{i,c}$, alors $|\text{dét}\, A| = |c|$ et, selon le signe de c, on a $A(C) = [0,1]^{i-1} \times [0,c] \times [0,1]^{n-i-1}$ ou $A(C) = [0,1]^{i-1} \times [c,0] \times [0,1]^{n-i-1}$. Dans les deux cas, on a $k_A = |c|$.
Enfin, soit $A = T_{ij}$; d'où $|\text{dét}\, A| = 1$. Pour simplifier l'écriture, on prend $i = 1$, $j = 2$. Alors

$$A(C) = \{(x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)\ ;\ 0 \le x_k \le 1\} = \{(y_1, x_2, \ldots, x_n)\ ;\ x_2 \le y_1 \le 1 + x_2, 0 \le x_k \le 1\}.$$

On partitionne $A(C) = B_1 \cup B_2$, où B_1 est l'ensemble des points tels que $x_2 \le y_1 \le 1$ et B_2 contient les points tels que $1 < y_2 \le x_2 + 1$. B_1 est fermé, donc borélien, d'où $B_2 = A(C) \setminus B_1$ l'est aussi. Par ailleurs, on a $B_1 \subset C$ et $B_2 = (C \setminus B_1) + e_1$. Donc

$$k_A = \lambda_n(A(C)) = \lambda_n(B_1) + \lambda_n(B_2) = \lambda_n(B_1) + \lambda_n((C \setminus B_1) + e_1) = \lambda_n(B_1) + \lambda_n(C \setminus B_1) = \lambda_n(C) = 1.$$

Enfin, soit $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mesurable. Il existe E_1, E_2 boréliens tels que $E_1 \subset E \subset E_2$ et $\lambda_n(E_2 \setminus E_1) = 0$. On trouve que $A(E_1) \subset A(E) \subset A(E_2)$ et $\lambda_n(A(E_2) \setminus A(E_1)) = \lambda_n(A(E_2 \setminus E_1)) = 0$. Donc $A(E)$ est Lebesgue mesurable. Le même raisonnement appliqué à A^{-1} montre l'implication inverse : si $A(E)$ est Lebesgue mesurable, alors E l'est. Pour conclure, on note que

$$\lambda_n(A(E)) = \lambda_n(A(E_2)) = |\text{dét}\, A|\lambda_n(E_2) = |\text{dét}\, A|\lambda_n(E).$$

□

Remarque 8.1. *Si A n'est pas inversible, alors on a : pour toute partie E de $\mathbb{R}^n$, $A(E)$ est Lebesgue mesurable, de mesure nulle. En effet, dans ce cas $A(\mathbb{R}^n)$ est un sous espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\leq n-1$, donc contenu dans un hyperplan. Il s'ensuit que $\lambda_n(A(\mathbb{R}^n)) = 0$, d'où $\lambda_n(A(E)) = 0$ pour tout E.*

Remarque 8.2. *La mesure de Lebesgue étant invariante par translations, on peut remplacer dans le théorème précédent "linéaire" par "affine". En effet, si $Bx = Ax + b$, avec A matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $\lambda_n(B(E)) = \lambda_n(A(E)+b) = \lambda_n(A(E)) = |\text{dét}\, A|\lambda_n(E)$, pour tout E Lebesgue mesurable.*

8.3 Un peu de topologie

Dans la suite de ce chapitre, on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$.
On munit $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ de la norme matricielle subordonnée : $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_\infty \ ; \ \|x\|_\infty \leq 1\}$.
Un cube (de $\mathbb{R}^n$) est un produit $C = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, où les I_j sont des intervalles de même longueur, strictement positive. On appelera la longuer commune de ces intervalles la **taille** de C.
Soit $j \in \mathbb{N}$. On peut recouvrir $\mathbb{R}^n$ avec des cubes disjoints de taille $1/2^j$: $\mathbb{R}^n = \cup_{l\in\mathbb{Z}^n}(1/2^j \cdot l + [0, 1/2^j[^n)$.
On va noter $\mathscr{Q}_j$ la collection de ces cubes ; C va désigner un cube appartenant à $\mathscr{Q}_j$.
Si $F \subset \mathbb{R}^n$, on pose $F_j = \cup\{C \ ; \ C \in \mathscr{Q}_j, C \cap F \neq \emptyset\}$.
Notons que $F_j \subset F_{j-1}$ si $j \geq 1$. En effet, pour tout cube C de $\mathscr{Q}_j$, il existe un (unique) cube Q de $\mathscr{Q}_{j-1}$ qui le contient. Donc, si C apparaît dans F_j, alors Q apparaît dans F_{j-1}, ce qui implique $F_j \subset F_{j-1}$.
Notons aussi que $F \subset F_j$. En effet, si $x \in F$, alors il existe un C de $\mathscr{Q}_j$ tel que $x \in C$. C apparaît donc dans F_j, d'où x appartient à F_j.

Proposition 8.2. *Soit K un compact. Alors $K_j \searrow K$ et $\lambda_n(K_j) \to \lambda_n(K)$.
De plus, si U est un ouvert tel que $U \supset K$, alors, pour j suffisamment grand, on a $U \supset K_j$.*

Démonstration. Nous avons déjà vu que la suite (K_j) décroît. Il reste à montrer que $\cap K_j = K$.
Si $x \in K_j$, alors il existe un C de $\mathscr{Q}_j$ tel que $x \in C$ et $C \cap K \neq \emptyset$. Soit $y_j \in K \cap C$. Alors $\|x - y_j\|_\infty \leq 1/2^j$, d'où $\text{dist}(x,K) \leq 1/2^j$. Si $x \in \cap K_j$, alors $\text{dist}(x,K) = 0$, d'où $x \in K$.
Notons que l'ensemble K_j est réunion a. p. d. de cubes (qui sont boréliens), donc un borélien. La deuxième propriété découle du théorème de la suite décroissante si K_0 est borné (donc de mesure de Lebesgue finie). Soit M tel que $\|x\|_\infty \leq M$, $x \in K$. Si C apparaît dans K_0, alors il existe $\in K \cap C$, d'où $\|x - y\|_\infty < 1$, $y \in C$. On trouve $\|y\|_\infty \leq M + 1$, $y \in K_0$; K_0 est donc borné.
Pour la dernière propriété, soit $\varepsilon = \text{dist}(K, U^c) > 0$. Si $2^{j_0} > 1/\varepsilon$ et $j \geq j_0$, alors $1/2^j < \varepsilon$. Pour un tel j, montrons que $U \supset K_j$.
Soit $y \in K_j$. Alors il existe $C \in \mathscr{Q}_j$ tel que $y \in C$ et il existe $x \in K$ tel que $x \in C$. On trouve que $\|x - y\|_\infty < 1/2^j$, d'où $\text{dist}(y, U^c) \geq \text{dist}(x, U^c) - \|x - y\|_\infty \geq \text{dist}(K, U^c) - 1/2^j > 0$, d'où $y \notin U^c$, ou encore $y \in U$. □

Remarque 8.3. *Pour la première propriété, on peut remplacer compact par fermé.*

8.4 Image d'un petit cube par un C^1-difféomorphisme

Dans la suite, U et V désigneront des ouverts de $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. On considère une application $\Phi : U \to V$ qui est un C^1-difféomorphisme. C'est-à-dire :
(i) Φ a des dérivées partielles qui sont continues ;
(ii) le déterminant jacobien de Φ, noté J_Φ et donné par $J_\Phi = \text{dét}(\partial\Phi_i/\partial x_j)_{i,j=1,\dots,n}$, est $\neq 0$ en tout point de U ;
(iii) Φ est bijective.
Rappelons que, sous ces hypothèses, le théorème d'inversion locale affirme que Φ^{-1} est encore de classe C^1 (et a donc exactement les mêmes propriétés que Φ).
Nous noterons $D\Phi(x)$ la matrice jacobienne de Φ en $x \in U$, $D\Phi(x) = (\partial\Phi_i/\partial x_j(x))_{i,j=1,\dots,n}$.
Nous aurons besoin par la suite du résultat suivant, laissé en

Exercice 8.1. *Soit (Y,d) un espace métrique. Soit $h \in C(U,Y)$ et soit K un compact de U. Alors, pour tout $\nu > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :*
(i) si $x \in K$ et si $y \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\|x-y\|_\infty < \delta$, alors $[x,y] \subset U$ (ici, $[x,y]$ est le segment reliant x et y) ;
(ii) si $x \in K$ et $y \in U$ sont tels que $\|x-y\|_\infty < \delta$, alors $d(h(x),h(y)) < \nu$.

Notons que, si C est un cube, alors C est borélien, d'où $\Phi(C) = (\Phi^{-1})^{-1}(C)$ est encore un borélien.

Proposition 8.3. *Soient K un compact de U et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout cube C de taille $< \delta$ et contenant un point x de K, on ait $\lambda_n(\Phi(C)) \le (1+\varepsilon)|J_\Phi(x)|\lambda_n(C)$.*

Démonstration. On utilise l'exercice précédent avec : $Y = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme donnée ci-dessus, $h(x) = D\Phi(x)$ et ν à fixer ultérieurement.
Soit δ la constante donnée par l'exercice et soit C un cube de taille $< \delta$, contenant un point $x \in K$.
Le théorème des accroissements finis donne, pour $y \in C$, avec l la taille de C,

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - D\Phi(x)\cdot(y-x)\|_\infty \le \sup_{z\in[x,y]} \|D\Phi(z) - D\Phi(x)\| \, \|y-x\|_\infty \le \nu l.$$

Si on pose $A = D\Phi(x)$ et $b = \Phi(x) - Ax$, alors l'inégalité ci-dessus devient $\|\Phi(y) - Ay - b\|_\infty \le \nu l$, ou encore $\Phi(y) = Ay + z$ pour un $z \in \overline{B}(b,\nu l)$. Il s'ensuit que $\Phi(C) \subset A(C) + \overline{B}(b,\nu l)$.
On voit facilement que (A étant inversible) on a $A(C) + \overline{B}(b,\nu l) = A(C + A^{-1}(\overline{B}(b,\nu l)))$. Il s'ensuit que

$$\lambda_n(\Phi(C)) \le \lambda_n(A(C + A^{-1}(\overline{B}(b,\nu l)))) = |\text{dét}\, A|\lambda_n(C + A^{-1}(\overline{B}(b,\nu l))).$$

Soit $M = \max\{\|(D\Phi)^{-1}(y)\| \,;\, y \in K\} < \infty$. Alors $\|A^{-1}y\| \le M\|y\|$, $y \in \mathbb{R}^n$, d'où $A^{-1}(\overline{B}(b,\nu l)) \subset \overline{B}(A^{-1}b, M\nu l)$. Si z est le centre (de gravité) de C, alors $C \subset \overline{B}(z, l/2)$, d'où $C + A^{-1}(\overline{B}(b,\nu l)) \subset \overline{B}(z + A^{-1}b, (2M\nu + 1)l/2)$. On trouve

$$\lambda_n(\Phi(C)) \le |\text{dét } A|\lambda_n(\overline{B}(z+b,(2M\nu+1)l/2)) = |\text{dét } A|(1+2M\nu)^n l^n = (1+2M\nu)^n\lambda_n(C).$$

Pour conclure, il suffit de choisir ν tel que $(1+2M\nu)^n = 1+\varepsilon$. □

8.5 Changement de variables sur un compact

Proposition 8.4. *Soient $f \in C(V)$ et $K \subset U$ un compact. Alors*

$$\int_K f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_n = \int_{\Phi(K)} f d\lambda_n. \tag{8.1}$$

Remarque 8.4. *Les deux intégrales sont finies, car on intègre par rapport à la mesure de Lebesgue des fonctions continues sur un compact.*

Démonstration. On peut supposer $f \ge 0$ (sinon, on travaille avec $f_\pm$, puis on retranche les égalités obtenues).
Il suffit de montrer que l'on a, dans (8.1), $\ge$. En effet, si cette inégalité est vraie pour tout U, V, Φ, K et f, alors on peut l'appliquer à $V, U, \Phi^{-1}, \Phi(K)$ et $f \circ \Phi|J_\Phi|$. On trouve

$$\int_{\Phi(K)} f|J_\Phi \circ \Phi^{-1}|J_{\Phi^{-1}}|d\lambda_n \ge \int_K f \circ \phi|J_\Phi|d\lambda_n.$$

Or, $|J_\Phi \circ \Phi^{-1}||J_{\Phi^{-1}}| = |J_\Phi \circ \Phi^{-1}\ J_{\Phi^{-1}}| = |J_{id}| = 1$, c'est-à-dire on obtient $\le$ dans (8.1).
On montre $\ge$. Soient $\varepsilon > 0$ et le δ correspondant donné par la proposition précédente. Soit j_0 tel que $1/2^{j_0} < \delta$ et soit $j \ge j_0$. Soit (C_i) la famille (finie) de cubes de $\mathcal{Q}_j$ qui intersectent K. Soit, pour un tel cube, $y^i \in \Phi(K \cap \overline{C_i})$ un point de maximum de f sur le compact $\Phi(K \cap \overline{C_i})$. Alors

$$\int_{\Phi(K)} f d\lambda_n = \sum_i \int_{\Phi(K\cap C_i)} f d\lambda_n \le \sum_i f(y^i)\lambda_n(\Phi(K \cap C^i)) \le \sum_i f(y^i)\lambda_n(\Phi(C^i)).$$

Si $x^i = \Phi^{-1}(y^i) \in K \cap \overline{C_i}$, alors cette inégalité devient $\displaystyle\int_K f d\lambda_n \le \sum_i f \circ \Phi(x^i)\lambda_n(\Phi(C_i))$. La proposition précédente donne

$$\int_K f d\lambda_n \le (1+\varepsilon)\sum_i f \circ \Phi(x^i)|J_\Phi(x^i)|\lambda_n(C_i).$$

Soit z^i un point de minimum de $g = f \circ \Phi |J_\Phi|$ sur $\overline{C}_i$. Cette fonction est uniformément continue sur le compact $\overline{K_{j_0}} \subset U$. Par ailleurs, on a $\|x^i - z^i\|_\infty \le 1/2^j$. Il s'ensuit que, si j est suffisamment grand, alors $|g(x^i) - g(z^i)| \le \varepsilon$. On trouve, pour j grand,

$$\int_K f \, d\lambda_n \le (1+\varepsilon) \sum_i (f \circ \Phi(z^i)|J_\Phi(z^i)| + \varepsilon)\lambda_n(C^i) \le (1+\varepsilon) \int_{K_j} f \circ \Phi |J_\Phi| \, d\lambda_n + (1+\varepsilon)\varepsilon \lambda_n(K_j).$$

En utilisant la domination $|f \circ \Phi |J_\Phi| \chi_{K_j}| \le |f \circ \Phi |J_\Phi| \chi_{K_{j_0}}|$, $j \ge j_0$, on trouve, par convergence dominée, en faisant $j \to \infty$ dans l'inégalité précédente,

$$\int_K f \, d\lambda_n \le (1+\varepsilon) \int_K f \circ \Phi |J_\Phi| + (1+\varepsilon)\varepsilon \lambda_n(K).$$

ε étant arbitraire, on obtient $\ge$ dans (8.1). □

Pour $f = 1$, L compact de V et $K = \Phi^{-1}(L)$, on trouve

Corollaire 8.1. *Soit L un compact de V. Alors $\lambda_n(L) = \int_{\Phi^{-1}(L)} |J_\Phi| \, d\lambda_n$.*

8.6 Comment calculer la mesure d'un borélien à partir de celle des compacts

Théorème 8.2. *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ une mesure sur $\mathscr{B}_V$ telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset V$. Alors :*
(i) pour tout $E \in \overline{\mathscr{B}_V}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F de V et un ouvert $\Omega \subset V$ tels que $F \subset E \subset \Omega$ et $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$;
(ii) $\overline{\mu}$ (et donc μ) se calcule selon la formule

$$\overline{\mu}(E) = \sup\{\mu(K) \; ; \; K \subset E \text{ compact}\} = \inf\{\mu(\Omega) \; ; \; E \subset \Omega \subset V, \Omega \text{ ouvert}\}, \; E \in \overline{\mathscr{B}_V}.$$

Démonstration. Clairement, pour tout $E \in \mathscr{B}_U$, on a

$$(*) \; \sup\{\mu(K) \; ; \; K \subset E, K \text{ compact}\} \le \mu(E) \le \inf\{\mu(\Omega) \; ; \; E \subset \Omega \subset V, \Omega \text{ ouvert}\}.$$

Tout ouvert de E de $\mathbb{R}^n$ est l'union d'une suite croissante de compacts (K_n). Par le théorème de la suite croissante, on trouve $\mu(E) = \lim \mu(K_n)$. Ceci montre que, pour E ouvert contenu dans V, on a

$$(**) \; \mu(E) = \sup\{\mu(K) \; ; \; K \subset E, K \text{ compact}\} = \inf\{\mu(\Omega) \; ; \; E \subset \Omega \subset V, \Omega \text{ ouvert}\}.$$

Nous allons montrer que $\mathscr{A} = \{E \in \mathscr{B}_V \ ; \ E$ satisfait (**)$\} = \mathscr{B}_V$.
Dans un premier temps, on suppose $\mu(V) < \infty$. Si tel est le cas, alors $\mu(E) < \infty$ pour tout $E \in \mathscr{B}_V$, d'où (**) revient à : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert Ω tels que $K \subset E \subset \Omega \subset V$ et $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon$.
De plus, dans ce cas, (**) équivaut à : il existe une suite croissante de compacts, (K_l), et une suite décroissante d'ouverts, (Ω_l), telles que $K_l \subset E \subset \Omega_l$ et (***) $\lim \mu(K_l) = \lim \mu(\Omega_l)$. En effet, si cette dernière propriété est vraie, alors

$$\inf\{\mu(\Omega) \ ; \ E \subset \Omega \subset V, \Omega \text{ ouvert}\} \leq \lim \mu(\Omega_l) = \lim \mu(K_l) \leq \sup\{\mu(K) \ ; \ K \subset E, K \text{ compact}\}.$$

Grâce à (*), on voit qu'on a alors (**). Réciproquement, si on a (**), alors il existe (L_l) compacts et (Y_l) ouverts tels que $L_l \subset E \subset Y_l$ et $\mu(L_l) \to \mu(E)$, $\mu(Y_l) \to \mu(E)$. Il suffit alors de prendre $K_l = L_1 \cup \ldots \cup L_l$ et $\Omega_l = Y_1 \cap \ldots \cap Y_l$.
Notons encore que, grâce à l'hypothèse $\mu(V) < \infty$, (***) équivaut à $\mu(\Omega_l \setminus K_l) \to 0$.
On montre maintenant que $\mathscr{A}$ contient les compacts. Si $K \subset V$ est un compact, il suffit de trouver une suite (Ω_l) d'ouverts telle que $\mu(\Omega_l) \to \mu(K)$. On prend $\Omega_l = \{x \in U \ ; \ \text{dist}(x,K) < 1/l\}$. On a alors $\Omega_l \searrow K$, d'où $\mu(\Omega_l) \to \mu(K)$, par le théorème de la suite décroissante.
On montre par la suite que $\mathscr{A}$ contient les fermés de V. Soit (L_l) une suite de compacts telle que $L_l \nearrow V$. Alors $K_l := F \cap L_l \nearrow F \cap V = F$, d'où $\mu(K_l) \to \mu(F)$. Par ailleurs, chaque K_l est compact. Si $\Omega_l = \{x \in V \ ; \ \text{dist}\,(x,F) > 1/l\}$, alors $\Omega_l \searrow F$, d'où $\mu(\Omega_l) \to \mu(F)$. De plus, les Ω_l sont ouverts.
Prouvons que $\mathscr{A}$ est une tribu. On a $\emptyset \in \mathscr{A}$, car c'est un ouvert. Si $E \in \mathscr{A}$ et $\varepsilon > 0$, soient K compact, Ω ouvert tels que $K \subset E \subset \Omega \subset V$ et $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon/2$. On a (en prenant des complémentaires par rapport à V) $\Omega^c \subset E^c \subset K^c$, avec Ω^c fermé de V et K^c ouvert. Soit L un compact tel que $L \subset \Omega^c$ et $\mu(\Omega^c \setminus L) < \varepsilon/2$. Alors $L \subset E^c \subset K^c$ et $\mu(K^c \setminus L) = \mu(K^c \setminus \Omega^c) + \mu(\Omega^c \setminus L) = \mu(\Omega \setminus K) + \mu(\Omega^c \setminus L) < \varepsilon$. Donc $E^c \in \mathscr{A}$.
Enfin, soit $(E_l)_{l \geq 1} \subset \mathscr{A}$ et soit $E = \cup E_l$. Soient $\varepsilon > 0$ et, pour chaque l, un compact et un ouvert tels que $K_l \subset E_l \subset \Omega_l \subset V$ et $\mu(\Omega_l \setminus K_l) < \varepsilon/2^l$. On a $\mu((\cup \Omega_l) \setminus (\cup K_l)) \leq \sum \mu_j(\Omega_l \setminus K_l) < \varepsilon$. Comme $(\cup \Omega_l) \setminus (\cup_{l=1}^m K_l) \searrow (\cup \Omega_l) \setminus (\cup K_l)$ quand $m \to \infty$, le théorème de la suite décroissante donne, pour m suffisamment grand, $\mu((\cup \Omega_l) \setminus (\cup_{l=1}^m K_l)) < \varepsilon$. Pour un tel m, on prend $\Omega = \cup \Omega_l$ et $K = \cup_{l=1}^m K_l$, de sorte que Ω est ouvert, K est compact, $K \subset E \subset \Omega \subset V$ et $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon$.
Ceci prouve que, sous l'hypothèse $\mu_1(V) < \infty$, on a (ii) pour $E \in \mathscr{B}_V$. (i) pour $E \in \mathscr{B}_V$ est une conséquence de (ii), car le sup sur les fermés est supérieur au sup sur les compacts et inférieur à $\mu(E)$.
Montrons que (ii) reste vraie si $E \in \overline{\mathscr{B}_V}$. Comme ci-dessus, ceci implique que (i) est vraie pour un tel E.
Soit $E \in \overline{\mathscr{B}_V}$. Soient $E_1, E_2 \in \mathscr{B}_V$ tels que $E_1 \subset E \subset E_2$ et $\mu(E_1) = \mu(E_2) = \overline{\mu}(E)$. Alors

$$\overline{\mu}(E) = \mu(E_1) = \sup\{\mu(K) \ ; \ K \subset E_1 \text{ compact}\} \leq \sup\{\mu(K) \ ; \ K \subset E \text{ compact}\} \leq \overline{\mu}(E)$$

et

$$\overline{\mu}(E) \leq \inf\{\mu(\Omega) \; ; \; E \subset \Omega \subset V, \Omega \text{ ouvert}\} \leq \inf\{\mu(\Omega) \; ; \; E_2 \subset \Omega \subset V, \Omega \text{ ouvert}\} = \mu(E_2) = \overline{\mu}(E),$$

d'où la conclusion.
Enfin, on montre que le résultat est vrai sans l'hypothèse $\mu(V) < \infty$.
Montrons d'abord la première égalité dans (ii). Soit (L_l) une suite de compacts telle que $L_l \nearrow V$. On considère les mesures $\mu_l(E) = \mu(E \cap L_l)$, $E \in \mathscr{B}_V$, qui sont finies. On peut donc leur appliquer ce qui précède. Soit $E \in \mathscr{B}_V$. Pour tout l, il existe un compact K_l tel que $K_l \subset E$ et $\mu_l(K_l) > \mu_l(E) - 1/l$, ou encore $\mu(K_l \cap L_l) > \mu(E \cap L_l) - 1/l$. On a donc d'autant plus $\mu(K_l) > \mu_j(E \cap L_l) - 1/l$. En passant à la limite, on trouve (grâce au théorème de la suite croissante)

$$\mu(E) \geq \limsup \mu(K_l) \geq \liminf \mu(K_l) \geq \mu(E),$$

d'où $\mu(K_l) \to \mu(E)$.
Pour la deuxième égalité dans (ii), rappelons que, pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^n$, il existe une suite (V_l) d'ouverts telle que : $V_l \nearrow V$ et, pour tout l, $\overline{V_l}$ soit un compact contenu dans V (la suite donnée par $V_l = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|x\|_\infty < l \text{ et } \operatorname{dist}(x, V^c) > 1/l\}$ fait l'affaire). On a alors $\overline{V_l} \nearrow V$ et $\mu(V_l) \leq \mu(\overline{V_l}) < \infty$. On considère les mesures finies ν_l données par $\nu_l(E) = \nu_l(E \cap V_l)$. On peut appliquer le théorème que nous sommes en train de montrer à ces mesures.
Soit $E \in \mathscr{B}_V$. On pose $Y_1 = V_1$ et, pour $l \geq 2$, $Y_l = V_l \setminus V_{l-1}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un ouvert U_l tel que $U_l \supset E \cap Y_l$ et $\nu_l(U_l) < \nu_l(E \cap Y_l) + \varepsilon/2^l$, ou encore $\mu(U_l \cap V_l) < \mu(E \cap Y_l) + \varepsilon/2^l$. Alors $\Omega = \cup(U_l \cap V_l)$ est un ouvert qui contient E (car $E = \cup(E \cap Y_l)$) et $\mu(\cup(U_l \cap V_l)) \leq \sum \mu(U_l \cap V_l) \leq \mu(E) + \varepsilon$. En fait, on vient de montrer que $\mu(\Omega \setminus E) < \varepsilon$.
Prouvons maintenant (i) pour $E \in \mathscr{B}_V$. On utilise, pour E^c, la conclusion du paragraphe précédent : il existe un ouvert W contenant E^c tel que $\mu(W \setminus E^c) < \varepsilon/2$. Par ailleurs, il existe un ouvert Ω tel que $E \subset \Omega$ et $\mu(\Omega \setminus E) < \varepsilon/2$. On prend $F = W^c$, qui est un fermé de V. On a $F \subset E \subset \Omega$ et $\mu(\Omega \setminus F) = \mu(\Omega \setminus E) + \mu(E \setminus F) = \mu(\Omega \setminus E) + \mu(W \setminus E^c) < \varepsilon$.
Enfin, comme dans la première partie de la preuve, si (i) et (ii) sont vraies pour tout $E \in \mathscr{B}_V$, elles le sont pour tout $E \in \overline{\mathscr{B}_V}$. $\square$

Une conséquence immédiate de la première égalité dans (ii) est le

Corollaire 8.2. *Soient μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{B}_V$ telles que $\mu_1(K) = \mu_2(K) < \infty$, pour tout compact $K \subset V$. Alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Corollaire 8.3. *Soit $E \subset V$ un borélien. Alors $\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |J_\Phi| \, d\lambda_n$.*

Démonstration. Dans le corollaire précédent, on prend $\mu_1 = \lambda_n$ et $\mu_2(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |J_\Phi| \, d\lambda_n$. (Clairement, μ_2 est une mesure.) Pour $K \subset V$ compact, on a $\mu_1(K) = \mu_2(K)$, et cette quantité est finie, car la mesure de Lebesgue d'un compact est finie. $\square$

8.7 Théorème du changement de variables

Théorème 8.3. *Soit $f : V \to \mathbb{R}$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$, $g = f \circ \Phi |J_\Phi|$. Alors :*
a) f est borélienne si et seulement si g l'est ;
b) f est Lebesgue mesurable si et seulement si g l' est ;
c) f a une intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue) si et seulement si g en a une, et dans ce cas $\int_V f d\lambda_n = \int_U g d\lambda_n = \int_U f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_n$.

Démonstration. En notant que $f = g \circ \Phi^{-1} |J_{\Phi^{-1}}|$, on trouve qu'il suffit à chaque fois d'établir une implication ; l'implication inverse suit en échangeant U avec V et Φ avec Φ^{-1}.
a) Si f est borélienne, alors clairement g l'est aussi.
b) Si g est Lebesgue mesurable, soient $\tilde{g}$ une fonction borélienne et $A \subset U$ un borélien Lebesgue négligeable tel que $g = \tilde{g}$ en dehors de A. Alors $f = \tilde{g} \circ \Phi^{-1} |J_{\Phi^{-1}}|$ en dehors de $\Phi(A)$; il suffit donc de montrer que $\Phi(A)$ est négligeable. Or, $\lambda_n(\Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_n = 0$. Notons que ce raisonnement montre que, si $f = \tilde{f}$ λ_n-p. p., alors les intégrales correspondantes dans c) sont égales. Ainsi, il suffit d'établir c) pour des fonctions boréliennes.
c) En notant que f est positive si et seulement si g l'est, il suffit d'établir c) quand f et borélienne et positive.
Si $f = \chi_E$, avec $E \in \mathscr{B}_V$, l'égalité à montrer n'est rien d'autre que le Corollaire 8.3. Par linéarité, c) est encore vraie si f est étagée positive. Enfin, le cas général s'obtient par convergence monotone. □

8.8 Ensembles Lebesgue négligeables

Proposition 8.5. *Tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est union a. p. d. de cubes d. d. d.*

Démonstration. On reprend les notations de la Section 8.3.
On pose $M_0 = \{C \in \mathscr{Q}_0 \ ; \ C \subset U\}$ et, par récurrence, $M_j = \{C \in \mathscr{Q}_j \ ; \ C \subset U \setminus \cup_{C \in M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}} C\}$. Chaque $\mathscr{Q}_j$ étant dénombrable, M_j est a. p. d., d'où $\cup M_j$ est a. p. d. Par construction, les cubes de $\cup M_j$ sont d. d. d. Il reste à montrer que $\cup_{C \in \cup M_j} C = U$, l'inclusion $\subset$ étant claire par construction.
Soit $x \in U$. Alors x appartient à exactement un cube $C_j \in \mathscr{Q}_j$, pour tout j. Si $C_j \in M_j$ pour un j, alors $x \in \cup_{C \in \cup M_j} C$. Il suffit de montrer que la possiblité contraire mène à une absurdité.
Si $C_j \not\in M_j$, $\forall j$, en particulier $C_0 \not\in M_0$, d'où $C_0 \cap U^c \neq \emptyset$, ou encore il existe $x_0 \in C_0 \cap U^c$. On trouve $\text{dist}(x, U^c) \le \|x - x_0\|_\infty < 1$.
On montre que $\text{dist}(x, U^c) < 1/2^j$, $j \in \mathbb{N}$ (ce qui implique $\text{dist}(x, U^c) = 0$ et donne la contradiction $x \in U^c$).

Passage de $j-1$ à j : on a $x \in U \setminus \cup_{C \in M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}} C$. Par ailleurs, $C_j \notin M_j$, d'où $C_j \cap U^c \neq \emptyset$. Comme ci-dessus, on a $\text{dist}(x, U^c) < 1/2^j$. □

Proposition 8.6. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors E est Lebesgue négligeable si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille a. p. d. de cubes (C_i) telle que $E \subset \cup C_i$ et $\sum \lambda_n(C_i) < \varepsilon$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Il existe un ouvert U tel que $E \subset U$ et $\lambda_n(U) < \varepsilon$. On écrit U comme l'union d'une famille a. p. d. (C_i) de cubes disjoints. Alors $E \subset \cup C_i$ et $\sum \lambda_n(C_i) = \lambda_n(U) < \varepsilon$.
$\Longleftarrow$ Avec $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, soit (C_i^n) la famille de l'énoncé. Alors $B = \cap_n \cup_i C_i^n$ est un borélien contenu dans chaque $\cup_i C_i^n$, donc négligeable. Par ailleurs, B contient E. □

Proposition 8.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, avec $m \geq n$. Si $E \subset U$ est λ_n-négligeable, alors $\Phi(E)$ est λ_m-négligeable.*

Démonstration. Soit, pour $l \in \mathbb{N}^*$, $U_l = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_\infty < l, \text{dist}(x, U^c) > 1/l\}$, de sorte que $U_l \nearrow U$, $\overline{U_l} \nearrow U$, $\overline{U_l}$ est compact et $\overline{U_l} \subset U_{l+1}$.
On a $\Phi(E) = \cup \Phi(E \cap U_l)$; il suffit donc de montrer que $\Phi(E \cap U_l)$ est λ_n-négligeable. On peut donc remplacer E par $E \cap U_l$ et supposer $E \subset U_l$.
Soit $\varepsilon_l = \text{dist}(U_l, U_{l+1}) > 0$. Soit $\varepsilon < \varepsilon_l^n$. Soit (C_i) une suite de cubes telle que $E \subset \cup C_i$ et $\sum \lambda_n(C_i) < \varepsilon$. En particulier, on a $\lambda_n(C_i) < \varepsilon$ pour tout i, d'où chaque cube est de taille $< \varepsilon^{1/n} < \varepsilon_l$.
Quitte à enlever de la suite les cubes "inutiles" (qui n'intersectent pas E) on peut supposer $E \cap C_i \neq \emptyset$, pour tout i. Soit, à i fixé, $y \in E \cap C_i \subset U_l$. Si $x \in C_i$, on a $\|x - y\|_\infty < \varepsilon_l$, d'où $\text{dist}(x, U_l) < \varepsilon_l$. Il s'ensuit que $\cup C_i \subset U_{l+1}$.
Soit, pour chaque i, x^i le centre (de gravité) de C_i. Pour $x \in C_i$, le segment $[x, x^i]$ est dans C_i, donc dans U_{l+1}. Le théorème des accroissement finis donne $\|\Phi(x) - \Phi(x^i)\|_\infty \leq C\|x - x^i\|_\infty$, $x \in C_i$, où $C = \max\{\|D\Phi(y)\| \ ; \ y \in \overline{U_{l+1}}\} < \infty$.
Si δ_i est la taille de C_i, cette inégalité se récrit $\Phi(C_i) \subset \overline{B}(\Phi(x^i), C\delta_i)$. On trouve $\Phi(E) \subset \cup \overline{B}(\Phi(x^i), C\delta_i)$, d'où $\lambda_n(\Phi(E)) \leq \sum (2C)^m \delta_i^m \leq (2C)^m \varepsilon_l^{m-n} \sum \lambda_n(C_i) < (2C)^m \varepsilon_l^{m-n} \varepsilon$. □

8.9 Théorème du "presque changement de variables"

Théorème 8.4. *Soient U_1 un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Soient $U \subset U_1$ ouvert et $E \subset U_1 \setminus U$ λ_n-négligeable. Soient $V = \Phi(U)$ et $F = \Phi(E)$. On suppose que $\Phi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme.*
Soit $f : V \cup F \to \mathbb{R}$ et soit $g : U \cup E \to \mathbb{R}$, $g = f \circ \Phi |J_\Phi|$. Alors :
a) g est borélienne si f l'est ;
b) f est Lebesgue mesurable si et seulement si g l'est ;
c) f a une intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue) si et seulement si g en a une, et dans ce cas

$$\int_{V \cup F} f \, d\lambda_n = \int_{U \cup E} g \, d\lambda_n = \int_{U \cup E} f \circ \Phi |J_\Phi| \, d\lambda_n = \int_U f \circ \Phi |J_\Phi| \, d\lambda_n.$$

Démonstration. La propriété a) est claire. b) Les parties E et F étant λ_n-négligeables, on a f Lebesgue mesurable $\Longleftrightarrow f\chi_F$ l'est $\Longleftrightarrow f_{|V}$ l'est $\Longleftrightarrow g_{|U}$ l'est (ici, on utilise le théorème du changement de variables) $\Longleftrightarrow g$ est Lebesgue mesurable.
Enfin, c) suit du théorème du changement de variables, en notant que les intégrales sur E et F sont nulles. □

8.10 Changements usuels

8.10.1 Coordonnées polaires

Tout point de $\mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, avec $\theta \in [0,2\pi[$ et $r \geq 0$. Si $(x,y) \neq (0,0)$, cette écriture est unique. De plus, $\theta = 0 \Longleftrightarrow x > 0$ et $y = 0$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors $\Phi \in C^1$ et $J_\Phi(r,\theta) = r$. Il s'ensuit de ce qui précède que Φ est un difféomorphisme de $U =]0,\infty[\times]0,2\pi[$ vers $V = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\})$. Avec $E = \partial U$ et $F = [0,\infty[\times\{0\}$, on a $\Phi(E) = F$ et E est Lebesgue négligeable. On peut donc appliquer le Théorème 8.4 (avec $U_1 = \mathbb{R}^2$) : si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda_2 = \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,d\lambda_2(r,\theta)$ (au sens où soit les deux intégrales existent et alors elles sont égales, soit elles n'existent pas).

8.10.2 Coordonnées sphériques

Soit $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Alors $(\rho, x_3) \neq (0,0)$, d'où ce point s'écrit de manière unique $(\rho, x_3) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, avec $r > 0$ et $\varphi \in [-\pi,\pi[$. Comme $\rho > 0$, on a en fait $\varphi \in]-\pi/2,\pi/2[$. Par ailleurs, on peut écrire $(x_1,x_2) = (\rho\cos\theta, \sin\theta)$; cette écriture est unique si $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ et on prend $\theta \in [0,2\pi[$. Si, de plus, on a $(x_1,x_2) \not\in]0,\infty[\times\{0\}$, alors $\theta \in]0,2\pi[$.
Finalement, tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\}\times\mathbb{R} \cup]0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $x_1 = r\cos\varphi\cos\theta$, $x_2 = r\cos\varphi\sin\theta$, $x_3 = r\sin\varphi$, avec $r > 0$, $\varphi \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\theta \in]0,2\pi[$.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$. Avec $U_1 = \mathbb{R}^3$, $U =]0,\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\times]0,2\pi[$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\}\times\mathbb{R} \cup]0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R})$, Φ est une C^1-bijection entre U et V. Par ailleurs, on a $J_\Phi(r,\varphi,\theta) = -r^2\cos\varphi$, d'où Φ est un difféomorphisme.
Avec $E = \partial U$ et $F = \{(0,0)\}\times\mathbb{R} \cup]0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R}$, on a $\lambda_3(E) = 0$ et $\Phi(E) = F$.
Le théorème du presque changements de variables donne : si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f\,d\lambda_3 = \int_{[0,\infty[\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) r^2\cos\varphi\,d\lambda_3(r,\varphi,\theta)$.

8.10.3 Coordonnées cylindriques

Si $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus[0,\infty[\times\{0\}$, alors $(x_1,x_2,x_3)=(r\cos\theta,r\sin\theta,x_3)$, avec $r>0$, $0<\theta<2\pi$, l'écriture étant unique. Avec $\Phi(r,\theta,x_3)=(r\cos\theta,r\sin\theta,x_3)$ (de sorte que $J_\Phi(r,\theta,x_3)=r$), $U_1=\mathbb{R}^3$, $U=]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ $V=\mathbb{R}^3\setminus[0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R}$, $E=\partial U$, $F=[0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R}$, le théorème du presque changement de variables donne : si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est Lebesgue intégrable, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f\,d\lambda_3=\int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,x_3)r\,d\lambda_3(r,\theta,x_3)$.

8.10.4 Coordonnées sphériques généralisées

Soit $\Phi_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\Phi_n(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})=(r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1},r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1},$ $r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2},\ldots,r\sin\theta_1)$.
Tout point de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x=\Phi_n(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$. La preuve se fait par récurrence sur n. Passage de $n-1$ à n : soit $\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. On applique l'hypothèse de récurrence à $(\rho,x_3,\ldots,x_n)$, qui s'écrit donc $\Phi_{n-1}(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2})$. On a alors $\rho=r\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}$, d'où il existe θ_{n-1} tel que $x_1=\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}$ et $x_2=\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}$. On conclut à l'égalité $x=\Phi_n(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$.
On prouve de même par récurrence (nous omettons les détails) qu'on peut prendre $r\geq 0$, $\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}\in[-\pi/2,\pi/2]$ et $\theta_{n-1}\in[0,2\pi]$.
Le jacobien de Φ_n est (*) $J_{\Phi_n}=(-1)^{n(n+1)/2}r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2}$. Preuve par récurrence sur n, les cas $n=2,3$ étant établis. Si on note $a_1,\ldots,a_{n-1}$ les composantes de Φ_{n-1}, alors $\Phi_n=(a_1\cos\theta_{n-1},a_1\sin\theta_{n-1},a_2,\ldots,a_n)$. On trouve $D\Phi_n=\begin{pmatrix}\cos\theta_{n-1}Da_1 & -a_1\sin\theta_{n-1}\\ \sin\theta_{n-1}Da_1 & a_1\cos\theta_{n-1}\\ Da_2 & 0\\ \ldots & 0\\ Da_n & 0\end{pmatrix}$. En développant le déterminant selon la dernière colonne, on trouve $J_{\Phi_n}=(-1)^n a_1 J_{\Phi_{n-1}}$, relation de récurrence qui permet d'établir facilement (*).
Comme pour les coordonnées sphériques, on a, avec $U_1=\mathbb{R}^n$, $U=]0,\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[^{n-2}\times]0,2\pi[$, $E=\partial U$, $F=\cup_{j=1}^{n-2}\mathbb{R}^{n-j}\times\{0\}\times\mathbb{R}^{j-1}\cup[0,\infty[\times\{0\}\mathbb{R}^{n-2}$, $V=\mathbb{R}^n\setminus F$: $\Phi\in C^1(U_1)$, $\Phi:U\to V$ est un C^1-difféomorphisme, E est λ_n-négligeable et $\Phi(E)=F$.
Le théorème du presque changement de variables donne : si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda_n=\int_{[0,\infty[\times[-\pi/2,\pi/2]^{n-2}\times[0,2\pi]} f\circ\Phi_n r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2}\,d\lambda_n$.

8.11 Intégrales de référence

Comme pour les intégrales généralisées, quand on étudie la nature d'ine intégrale de Lebesgue il est utile de disposer d'une liste d'intégrales de nature connue. Dans la suite, on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne, et B_R est la boule ouverte centrée en 0 et de rayon R.

Proposition 8.8. *a)* $x \mapsto 1/|x|^a$ *est intégrable sur* B_1 *si et seulement si* $a < n$.
b) $x \mapsto 1/(|x|^a |\ln x|^b)$ *est intégrable sur* $B_{1/2}$ *si et seulement si* $a < n$ *ou* $a = n$ *et* $b > 1$.
c) $x \mapsto 1/|x|^a$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ *si et seulement si* $a > n$.
d) $x \mapsto 1/(|x|^a |\ln x|^b)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^n \setminus B_2$ *si et seulement si* $a > n$ *ou* $a = n$ *et* $b > 1$.

Démonstration. Nous faisons la preuve de b) ; preuve similaire dans les autres cas.
En passant en coordonnées sphériques généralisées, et en appliquant le théorème de Tonnelli, on a, avec $g(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = \cos^{n-2}\theta_1 \ldots \cos\theta_{n-2}$,

$$\int_{B_{1/2}} |x|^{-a} |\ln x|^{-b} d\lambda_n = \int_{[0,1/2[\times[-\pi/2,\pi/2]^{n-2}\times[0,2\pi]} r^{-a+n-1} |\ln r|^{-b} g \, d\lambda_n = C \int_0^{1/2} r^{-a+n-1} |\ln r|^{-b} d\lambda_1,$$

où $C = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta_1 d\theta_1 \ldots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}$. On a $0 < C < \infty$, ce qui montre que l'intégrale de départ est finie si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_0^{1/2} 1/(r^{a-n+1} |\ln r|^b) d\lambda_1$ est finie, ce qui équivaut à $a < n$ ou $a = n$ et $b > 1$. $\square$