Chapitre 2

Laplacien

Rappelons que $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} = \operatorname{div} \nabla$. Rappelons aussi la solution fondamentale

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{si } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

Δ est le plus simple des opérateurs elliptiques (opérateurs du second ordre dont le symbole est donné par une forme quadratique définie positive). Il appartient à la fois :

1. À la famille des opérateurs de la forme $\operatorname{div}(A(x)\nabla)$, avec $A(x) > 0$ pour tout x (opérateurs en forme divergence).

2. À la famille des opérateurs de la forme $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}$, avec $A(x) = (a_{ij}(x)) > 0$ pour tout x (opérateurs en forme non divergence).

Les opérateurs en forme divergence sont adaptés aux solutions faibles, notion développée dans la deuxième partie des notes. Les opérateurs en forme non divergence sont plus adaptés à la théorie des solutions fortes ou à celle des solutions de viscosité. Pour les solutions fortes, voir par exemple [10, Chapter 9] ; un aperçu de la théorie des solutions de viscosité se trouve dans [13, Chapter 5].

2.1 Définition. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si $u \in C^2(\Omega)$ et $-\Delta u = 0$. Si on a $-\Delta u \geq 0$ ou $-\Delta u \leq 0$, alors u est sur-harmonique ou sous-harmonique.

Formules de Green

Commençons par quelques conséquences immédiates du théorème flux-divergence.

2.2 Théorème (Formules de Green)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *est Lipschitz.* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Au moins l'un des ensembles* Ω, $\operatorname{supp} u$, $\operatorname{supp} v$ *est relativement compact.*
Conclusions. On a

$$\text{(première formule de Green)} \int_\Omega u\Delta v = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,; \tag{2.1}$$

$$\text{(deuxième formule de Green)} \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right). \tag{2.2}$$

Démonstration. En intégrant par parties (Corollaire 8.25), on a

$$\int_\Omega u\partial_{ii}v = \int_{\partial\Omega} u\nu_i\partial_i v - \int_\Omega \partial_i u \partial_i v.$$

On obtient (2.1) en sommant sur i.
(2.2) s'obtient en retranchant de (2.1) l'identité obtenue en échangeant u et v dans (2.1). □

2.3 Corollaire.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $\omega \Subset \Omega$ *est un ouvert Lipschitz.* u *est harmonique dans* Ω.
Conclusion. On a

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0. \tag{2.3}$$

Démonstration. Prendre $v = 1$ dans la première formule de Green. □

Formule de la moyenne

2.4 Théorème (Formules de la moyenne pour les fonctions harmoniques)**.**
Hypothèses. u *est harmonique dans* $B(x,R)$ *et continue dans* $\overline{B}(x,R)$.
Conclusions. On a

$$u(x) = \fint_{S(x,r)} u, \quad \forall\, 0 < r \le R \tag{2.4}$$

et

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u, \quad \forall\, 0 < r \le R. \tag{2.5}$$

Démonstration. On peut supposer $x = 0$.
Étape 1. On obtient (2.4) *en utilisant la deuxième formule de Green.* Soit E la solution fondamentale de Δ donnée par (1.21), de sorte que $\Delta E = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soient $0 < \varepsilon < r < R$. Sur $\omega = B(0,r) \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$, on a

$$0 = \int_\omega (u\Delta E - E\Delta u) = \int_{S(0,r)}\left(u\frac{x}{r}\cdot\nabla E - E\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) - \int_{S(0,\varepsilon)}\left(u\frac{x}{\varepsilon}\cdot\nabla E - E\frac{\partial u}{\partial \nu}\right). \tag{2.6}$$

Sur chaque composante de $\partial\omega$, E est constante. Par ailleurs, on a $\dfrac{x}{|x|}\cdot\nabla E(x)=\dfrac{1}{\sigma_n|x|^{n-1}}$. En utilisant (2.3), (2.6) devient $\displaystyle\fint_{S(0,r)} u=\fint_{S(0,\varepsilon)} u$.

On conclut en notant que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\fint_{S(0,\varepsilon)} u=u(0)$ et que le membre de droite de (2.4) est continu par rapport à $r\in(0,R]$.

Étape 2. On obtient (2.5). On a

$$\int_{B(0,r)} u=\int_0^r\int_{S(0,t)} u\,dt=\int_0^r \sigma_n t^{n-1}u(0)\,dt=\frac{\sigma_n}{n}r^n u(0)=|B(0,r)|u(0).$$ □

La preuve ci-dessus combinée avec le fait que E croît avec $|x|$ donne le résultat suivant.

2.5 Théorème.
Hypothèses. *u est sous-harmonique (respectivement sur-harmonique) dans $B(x,R)$ et continue dans $\overline{B}(x,R)$.*
Conclusion. *On a*

$$u(x)\le\fint_{S(x,r)} u\le\fint_{B(x,r)} u,\quad \forall\, 0<r\le R,\tag{2.7}$$

respectivement

$$u(x)\ge\fint_{S(x,r)} u\ge\fint_{B(x,r)} u,\quad \forall\, 0<r\le R.\tag{2.8}$$

Principes du maximum

Chaque principe du maximum se décline en trois variantes : pour des fonctions sous-, sur- et harmoniques. Nous en donnerons un de chaque sorte et laisserons au lecteur le soin de trouver les énoncés manquants.

Par ailleurs, il y a trois preuves possibles de ces principes. La première repose sur la formule de la moyenne, et rappelle les arguments d'analyse complexe. Elle est spécifique au laplacien. La deuxième découle du lemme de Hopf et s'adapte bien aux opérateurs en forme non divergence. Enfin, la troisième est basée sur des méthodes énergétiques, et va bien avec les opérateurs en forme divergence.

2.6 Théorème.
Hypothèses. *$\Omega\sqsubset\mathbb{R}^n$ domaine. u sous-harmonique dans Ω. u a un point de maximum.*
Conclusion. *u constante.*

Démonstration. Soient $M=\max u$ et $F=\{x\in\Omega\,;u(x)=M\}$. Ω étant connexe et F étant fermé (de Ω) non vide, il suffit de montrer que F est ouvert. Soit $x_0\in F$. Soit $0<R<\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$. Alors

$$M=u(x_0)\le\fint_{B(x_1,R)}\underbrace{u(x)}_{\le M}\,dx\le M.$$

On trouve $u\equiv M$ dans $B(x_1,R)$, et donc $B(x_1,R)\subset F$. □

2.7 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.* u *harmonique dans* Ω. $u \in C(\overline{\Omega})$.
Conclusion. *On a*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u. \tag{2.9}$$

Démonstration. On établit par exemple la majoration $u \leq \max_{\partial\Omega} u$.

Commençons par le cas particulier où Ω est connexe. Soit x_0 un point de maximum de u. Si $x_0 \in \partial\Omega$, on a la conclusion voulue. Sinon, u est constante, et on a encore (2.9).

Passons au cas général. Soient ω_i, $i \in I$, les composantes connexes de Ω. Alors

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{i\in I} \sup_{\omega_i} u \leq \sup_{i\in I} \max_{\partial\omega_i} u \leq \max_{\partial\Omega} u,$$

la dernière égalité découlant du lemme qui suit. □

2.8 Lemme.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. ω *composante connexe de* Ω.
Conclusion. $\partial\omega \subset \partial\Omega$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \partial\omega \subset \overline{\omega} \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Supposons par l'absurde que $x_0 \notin \partial\Omega$. Alors $x_0 \in \Omega$, et donc il existe $R > 0$ tel que $B(x_0, R) \subset \Omega$. Comme $x_0 \in \partial\omega$, on a $B(x_0, R) \cap \omega \neq \emptyset$ et $B(x_0, R) \not\subset \omega$. Il s'ensuit que $\omega \cup B(x_0, R)$ est un connexe contenu dans Ω et contenant strictement ω. Impossible, car ω est une composante connexe. □

2.9 Théorème (Lemme de Hopf)**.**
Hypothèses. B *boule.* $x_0 \in \partial B$. u *sur-harmonique dans* B. $u \in C^1(\overline{B})$. $u > u(x_0)$ *dans* B. ν *la normale extérieure à* B *en* x_0.
Conclusion. $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$.

Démonstration. On peut supposer que $B = B(0, R)$ et $u(x_0) = 0$. Soient, avec $\varepsilon > 0$ et $a > 0$ à fixer, $v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-aR^2}$ et $w = u - \varepsilon v$. Soit $\omega = B(0, R) \setminus \overline{B}(0, R/2)$.

Si ε est suffisamment petit, alors $w \geq 0$ sur $\partial\omega$. Ici, on utilise $u \geq 0$ et $v = 0$ sur $S(0, R)$ et $u > 0$ sur $S(0, R/2)$.

Par ailleurs, on a (Exercice 1.18) $\Delta v(x) = 2a(2a|x|^2 - n)e^{-a|x|^2}$, d'où $\Delta v \geq 0$ dans ω si a est suffisamment grand. On trouve $-\Delta(u - \varepsilon v) \geq 0$ pour un tel a.

Donc, pour ε et a convenables, $w(x_0) = 0$, w est sur-harmonique dans ω et $w \geq 0$ sur $\partial\omega$. Par le principe du maximum, on a $w \geq 0$ dans ω, d'où x_0 est un point de minimum global de w dans $\overline{\omega}$. Ceci entraîne $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$. On obtient $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \varepsilon \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -2\varepsilon a R e^{-aR^2} < 0$. □

On peut montrer que le lemme de Hopf implique le principe du maximum (Exercice 2.25). Ceci peut paraître un cercle vicieux, sauf qu'il y a moyen de prouver le lemme de Hopf sans passer par le principe du maximum (en utilisant l'Exercice 2.26).

Montrons maintenant un résultat plus faible que le théorème 2.7, dont l'intérêt réside dans la preuve, bien adaptée aux solutions faibles.

2.10 Proposition.
Hypothèses. Ω *borné lipschitzien.* $u \in C^2(\overline{\Omega})$. $-\Delta u \leq 0$ *dans* Ω. $u \leq 0$ *sur* $\partial\Omega$.
Conclusion. $u \leq 0$ *dans* Ω.

Démonstration. Soit $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(t) = 0$ si $t \le 0$ et $\Phi'(t) > 0$ si $t > 0$. Par exemple, $\Phi(t) = (t_+)^2$ convient. On multiplie l'inégalité $-\Delta u \le 0$ par $\Phi(u)$ et on intègre dans Ω. En utilisant la première formule de Green et le fait que $u \le 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve $\int_\Omega \Phi'(u)|\nabla u|^2 \le 0$, d'où $\Phi'(u)\nabla u = 0$, ou encore $\nabla(\Phi(u)) = 0$. On trouve $\Phi(u)$ constante. Comme $\Phi(u) = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient $\Phi(u) = 0$ (Exercice 2.20), d'où $u \le 0$. □

Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet est

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.10}$$

Une solution (classique) de (2.10) est $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant ce problème. On suppose satisfaites les conditions de compatibilité $f \in C(\Omega)$ et $g \in C(\partial\Omega)$.

Nous allons évoquer ici plusieurs aspects.

1. Une stratégie pour résoudre (2.10), en minimisant une fonctionnelle (principe de Dirichlet). Ce principe va nous mener plus tard aux solutions faibles.
2. Un contre-exemple célèbre (dû à Weierstrass) montrant l'impossibilité de résoudre (2.10) en général, et donc l'invalidité du principe de Dirichlet.
3. L'unicité et les estimations a priori pour ce problème.
4. L'existence d'une solution du problème de Dirichlet si $f = 0$ et Ω est suffisamment régulier. Ce résultat est pour l'essentiel dû à Poincaré, mais la présentation "moderne" donnée ici est postérieure, et due à Perron.

2.11 Proposition (Principe de Dirichlet)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *solution classique de* (2.10).
Conclusion. *u est l'unique point de minimum de*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v\,;\, v \in C^2(\overline{\Omega}),\, v = g \textit{ sur } \partial\Omega\right\}. \tag{2.11}$$

Démonstration. Soit $v \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que $v = g$ sur $\partial\Omega$. Soit $w = v - u$. La première formule de Green donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - \int_\Omega f w \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2.\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v \ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u,$$

avec égalité si et seulement si w est localement constante. Comme $w = 0$ sur $\partial\Omega$, si w est localement constante alors on trouve $w = 0$, d'où $u = v$ (Exercice 2.20). □

En général, le problème (2.10) n'a pas de solution. Il y a deux obstructions à cela. L'une vient de la régularité de f. L'autre de la régularité de Ω.

2.12 Proposition (L'exemple de Weierstrass)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $n \geq 2$.
Conclusion. Il existe $f \in C(\overline{\Omega})$ *tel que l'équation* $-\Delta u = f$ *n'ait pas de solution* $u \in C^2(\Omega)$.

Démonstration. On peut supposer que $0 \in \Omega$. Soit v la fonction de l'Exercice 2.21. Soit $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v(x) = \begin{cases} (x_2^2 - x_1^2)|\ln|x||^\alpha, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, avec $\alpha \in (0,1)$. Soit $f_0 = -\Delta v$, fonction définie si $x \neq 0$. Alors $v \in C(\mathbb{R}^n)$ et f_0 se prolonge par continuité avec la valeur 0 si $x = 0$ (Exercice 2.21). Soit f le prolongement continu de f_0 à $\overline{\Omega}$. Alors il n'existe pas de $u \in C^2(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$. Preuve par l'absurde : on a $\Delta(u - v) = 0$ dans $\Omega \setminus \{0\}$ et $u - v \in C(\Omega)$, d'où $u - v \in C^\infty(\Omega)$ (principe des singularités artificielles, Exercice 2.22), et en particulier $v \in C^2$. Or $v \notin C^2$ (Exercice 2.21). □

2.13 Proposition (Estimation a priori pour le problème de Dirichlet)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.* u *solution de* (2.10).
Conclusion. On a

$$|u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C(\Omega) \sup_{\Omega} |f|. \tag{2.12}$$

Démonstration. On peut supposer f bornée. Soit $a = \max_{x \in \overline{\Omega}} x_1^2$. Soit

$$v(x) = \max_{\partial\Omega} |g| + \left(\sup_{\Omega} |f|\right) \frac{a - x_1^2}{2}.$$

Alors $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$, par le principe du maximum appliqué à $u - v$. De même, $u \geq -v$. On obtient (2.12) avec $C(\Omega) = a/2$. □

2.14 Corollaire.
Hypothèse. Ω *borné.*
Conclusion. Le problème (2.10) *a au plus une solution.*

On est maintenant en position de donner un deuxième type de contre-exemple à l'existence.

2.15 Proposition (L'exemple de Zaremba)**.**
Hypothèses. $n \geq 2$, $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\}$, $f = 0$, $g(x) = \begin{cases} 0, & si\ |x| = 1 \\ 1, & si\ x = 0 \end{cases}$.
Conclusion. Pour ces choix, (2.10) *n'a pas de solution.*

Démonstration. Par le principe du maximum, on a $0 \leq u \leq 1$. Par le principe des singularités artificielles Exercice 2.22, u est harmonique dans $B(0,1)$. Par unicité de la solution du problème de Dirichlet dans $B(0,1)$, on a $u = 0$, ce qui contredit $u(0) = 1$. □

Les exemples de Weierstrass et de de Zaremba décrivent les obstructions canoniques à l'existence de la solution du (2.10). Dès que l'on suppose f et Ω suffisamment réguliers, il y a une solution. Un résultat typique est le suivant.

2.16 Théorème (Poincaré)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *est borné lipschitzien.* $g \in C(\partial\Omega)$.
Conclusion. Le problème de Dirichlet homogène $\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ *a une solution* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Idée de la preuve. Si u est solution du problème et si $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est sous-harmonique et telle que $v \le g$ sur $\partial\Omega$, alors $v \le u$ dans Ω, par le principe du maximum. Cette inégalité devient égalité si $v = u$, ce qui implique (si (2.10) a une solution)

$$u = \sup\{v\,;\, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ sous-harmonique et } v \le g \text{ sur } \partial\Omega\}. \tag{2.13}$$

L'idée de Perron est de *définir* u comme le membre de droite de (2.13).

Par la suite, la preuve se fait en deux temps :

1. On montre que u est harmonique dans Ω. Ceci ne suppose aucune régularité de Ω. L'ingrédient essentiel de la preuve est la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet dans une boule (Théorème 1.7).

   De ce qui précède, u est la solution de (2.10), si cette solution existe.
2. On montre que, si Ω est Lipschitz, alors $u \in C(\overline{\Omega})$ et $u = g$ sur $\partial\Omega$. Ceci repose uniquement sur le principe du maximum et le fait que les ouverts lipschitziens ont la propriété du cône extérieur (Proposition 8.19). □

En règle générale, plus les données du problème sont régulières, plus la solution finale l'est. Le cas le plus favorable est décrit par le théorème suivant.

2.17 Théorème (Kellogg)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné, de classe* C^∞. $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. $g \in C^\infty(\partial\Omega)$.
Conclusion. La solution u *de* (2.10) *est de classe* $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Contrairement au théorème de Poincaré, le théorème de Kellogg n'a pas de preuve complètement élémentaire. Le moyen le plus économique de montrer ce résultat est de passer par la régularité des solutions faibles ; nous y reviendrons plus tard.

Problème de Neumann

Le problème de Neumann est

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.14}$$

Ici, on suppose Ω au moins Lipschitz, de sorte que la normale extérieure à $\partial\Omega$, ν, soit définie p. p. Si on suppose un peu plus de régularité, par exemple $\Omega \in C^1$, alors une solution (classique) de (2.14) est $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant ce problème. On suppose satisfaites les conditions de compatibilité $f \in C(\Omega)$ et $g \in C(\partial\Omega)$.

Il est plus difficile de donner des résultats d'existence des solutions classiques de (2.14). Le problème (2.14) sera traité naturellement dans le cadre des solutions faibles. Pour ce qui est des solutions classiques, on va se contenter de l'unicité. Voyons deux méthodes, la première basée sur le principe du maximum et adaptée aux opérateurs en forme non divergence, l'autre sur la méthode d'énergie et adaptée aux opérateurs en forme divergence.

2.18 Proposition (Unicité de la solution du problème de Neumann via le lemme de Hopf)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *est connexe, borné et* C^2*.* u *est solution classique du problème de Neumann homogène.*
Conclusion. u *est constante.*

Démonstration. Si u a un point de minimum dans Ω, la conclusion est claire. Sinon, soit $x_0 \in \partial\Omega$ un point de minimum de u, de sorte que $u(x) > u(x_0)$, $x \in \Omega$. Comme $\Omega \in C^2$, Ω a la propriété de la boule intérieure : il existe une boule B telle que $B \subset \Omega$ et $x_0 \in \partial B$ (Proposition 8.19). Le lemme de Hopf implique $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} u(x_0) < 0$, contradiction. □

2.19 Proposition (Unicité de la solution du problème de Neumann via l'énergie)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *est connexe, borné et lipschitzien.* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *solution du problème de Neumann homogène.*
Conclusion. u *est constante.*

Démonstration. On multiplie l'équation de u par u et on utilise la première formule de Green pour trouver $\nabla u = 0$, d'où u constante. □

Exercices

2.20 Exercice.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. $u \in C(\overline{\Omega})$. $u = 0$ sur $\partial\Omega$. u localement constante dans Ω.
Conclusion. $u = 0$.

2.21 Exercice. * Soit $n \geq 2$. Soit $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v(x) = (x_2^2 - x_1^2)\left|\ln(x_1^2 + x_2^2)\right|^\alpha$ si $x \neq 0$, avec $\alpha \in (0,1)$, prolongée par continuité en 0. Montrer que :

1. $v \in C \setminus C^2$.
2. $\Delta v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ se prolonge par continuité en 0.

2.22 Exercice (Principe des singularités artificielles)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \Omega$. u harmonique dans $\Omega \setminus \{x_0\}$. u bornée au voisinage de x_0.
Conclusions. u admet un prolongement par continuité en x_0. Le prolongement est harmonique dans Ω.

2.23 Exercice (Problèmes en présence de symétries)**.** *

1. Soit $R \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$.
2. Soit $\Omega = B(0,R)$ ou $\Omega = B(0,R) \setminus \overline{B}(0,\rho)$, où $0 < \rho < R$. Montrer que si f et g ne dépendent que de $|x|$, alors les solutions des problèmes de Dirichlet (2.10) et de Neumann (2.14) ne dépendent que de $|x|$.
3. Application. Calculer la capacité de la boule $K = \overline{B}(0,\rho)$ dans la boule $U = B(0,R)$:

$$\operatorname{cap}(K;\Omega) := \inf\left\{\int_U |\nabla u|^2 ; u \in C^2(\overline{U}), u = 0 \text{ sur } \partial U, u = 1 \text{ sur } K\right\}.$$

2.24 Exercice. * Montrer que le principe du maximum Théorème 2.7 et ses corollaires sont faux si Ω est un demi-espace.

2.25 Exercice (Preuve du principe du maximum en utilisant le lemme de Hopf)**.**

1. Soit $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et F un ouvert de Ω, non vide et différent de Ω. Montrer qu'il existe une boule B telle que $B \subset \Omega \setminus F$ et $\overline{B} \cap F \neq \emptyset$.
2. En déduire que si u est sur-harmonique dans Ω et a un point de minimum dans Ω, alors u est constante.

2.26 Exercice.
Hypothèses. $u \in C^2(\Omega)$. $-\Delta u > 0$ dans Ω.
Conclusion. u n'a pas de point de minimum local dans Ω.

2.27 Exercice. * Utiliser l'exercice précédent pour prouver le lemme de Hopf.

Indications

Exercice 2.20. Si Ω est connexe, alors u est constante dans Ω (une fonction localement constante dans un ensemble connexe est connexe). Soit C la valeur de cette constante. Si $x \in \partial\Omega$, alors il existe $(x_j) \subset \Omega$ telle que $x_j \to x$. On trouve $C = 0$. Si Ω n'est pas connexe, utiliser le Lemme 2.8.

Exercice 2.22. On peut supposer $x_0 = 0$. Soient $0 < R < \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$, $g = u_{|S(0,R)}$ et v la solution du problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } B(0,R) \\ v = g & \text{sur } S(0,R) \end{cases}$. Il suffit de montrer que $u = v$ dans $B(0,R)$. Soient $x_0 \in S(0,R)$, E la solution fondamentale de Δ et $w_\varepsilon(x) = v(x) - u(x) - \varepsilon(E(x) - E(x_0))$. Alors $w_\varepsilon \geq 0$ sur $S(0,\rho)$ pour $\rho \leq \rho_0$, avec ρ_0 suffisamment petit (dépendant de ε). Par le principe du maximum, $w_\varepsilon \geq 0$ dans $B(0,R) \setminus \{0\}$. On obtient $v \geq u$, et de même $v \leq u$.

Exercice 2.25.

1. Soient $x_0 \in \Omega \setminus F$ et $x_1 \in F$. Ω étant connexe, il est connexe par arcs. Soit $\gamma \subset \Omega$ un arc connectant x_0 à x_1. En considérant la fonction continue
$$[0,1] \ni t \mapsto f(t) \frac{\operatorname{dist}(\gamma(t), F)}{\operatorname{dist}(\gamma(t), \partial\Omega)},$$
montrer qu'il existe un $t \in [0,1]$ tel que $0 < f(t) < 1$. En déduire que $B = B(\gamma(t), \operatorname{dist}(\gamma(t), F))$ convient.
2. Si, par l'absurde, u n'est pas constante, soient $m = \min u$ et $F = \{x \in \Omega ; u(x) = m\}$. En appliquant le lemme de Hopf à u dans B, on trouve un point $x_0 \in F$ et un ν tel que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, d'où m n'est pas le minimum de u.

Exercice 2.26. En un point de minimum local, la matrice hessienne de u est positive. Donc la trace de la hessienne est positive.

Commentaires

Le problème de Dirichlet a fasciné les analystes dès le 19$^{\text{e}}$ siècle, et sa résolution satisfaisante a pris du temps : des travaux de Green en 1828 aux résultats les plus récents de régularité, au début des années 1970. Concernant l'histoire ancienne (jusqu'aux années 1920), la monographie de Kellogg [15, pp. 277-286] est une excellente source.

La preuve du théorème de Poincaré 2.16 est bien expliquée dans [10, Section 2.8 et Exercise 2.12].

La théorie des solutions classiques du problème de Neumann est l'une des grandes réussites de la théorie du potentiel. La monographie [15] est le grand classique de cette théorie. Pour une théorie moderne du potentiel, voir par exemple [16].