Analyse T4, TD n° 6 / Vendredi 21 octobre 2016

Corrigé du Contrôle n° 1

Exercice 1 : Etudier la nature (convergente, divergente, n'existe pas) des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}.dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}.dx \quad (\text{ avec } \alpha \in \mathbf{R} \text{ paramètre })$$

Solution :

1) L'intégrale $\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}.dx$ est impropre en 0.

La fonction $f : x \to \sin\frac{1}{x^2}$ est définie, et continue sur]0, 1] ; elle est sans limite en 0+, car f oscille au V(0+).

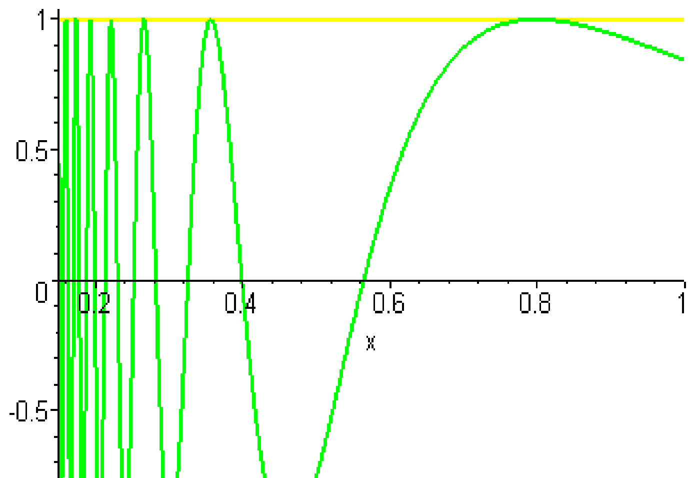
L'intégrale est absolument convergente en vertu du critère de majoration, car $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leq 1$.

Or la fonction 1 est intégrable sur]0, 1].

Autre idée : le changement de variable y = 1/x la transforme en $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(y^2)}{y^2}.dy$ qui est aussi absolument convergente, car $\left|\frac{\sin(y^2)}{y^2}\right| \leq \frac{1}{y^2}$. Par conséquent, l'intégrale converge.

Avec Maple :

```
> with(plots);
> f:=x->sin(1/x^2);plot([-1,f(x),+1],x=0.15..1,thickness=2);
```




```
> J:=int(f(x),x=0..1);evalf(J);
```

$$J := \sin(1) - \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\text{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}$$

$$.2857366468$$

Il serait intéressant de justifier ce calcul de Maple : taper > FresnelC ? ;

2) L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}.dx$ est impropre en 0+ et en +∞.

La fonction $x^{\alpha}\,e^{-x}$ est continue et positive sur]0, +∞[.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}.dx$ est toujours convergente, car $0 < x^{\alpha}\,e^{-x} < \frac{1}{x^2}$ au V(+∞).

Cela découle de ce que $x^{\alpha+2}\,e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

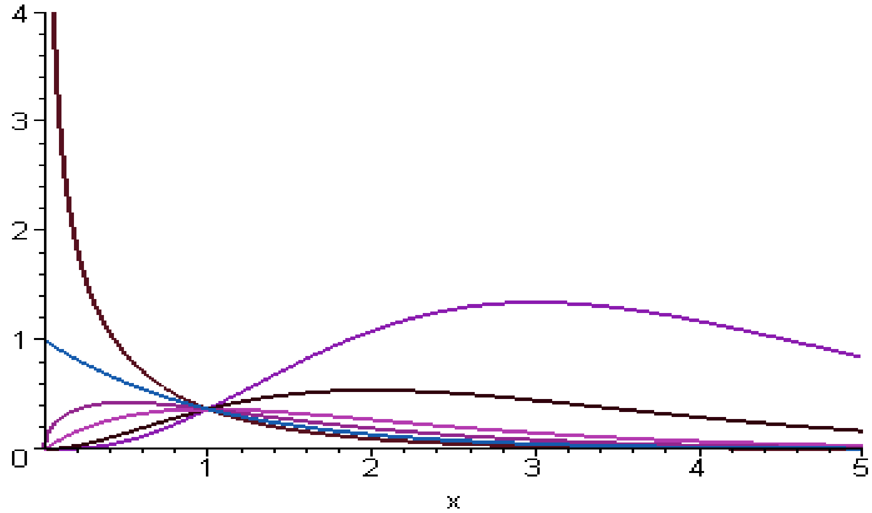
Variante : $0 < x^{\alpha}\,e^{-x} < e^{-x/2}$ au V(+∞), car $x^{\alpha}\,e^{-x/2} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

L'intégrale $\int_0^{1} x^{\alpha}e^{-x}.dx$ converge ssi $\alpha > -1$, car $x^{\alpha}\,e^{-x} \sim x^{\alpha} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ au V(0+)

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}.dx$ converge ssi $\alpha > -1$.

Avec Maple :

```
> with(plots):
> f:=(alpha,x)->x^alpha*exp(-x);p:=alpha->plot(f(alpha,x),x=0..5,0..4,thickness=2,
color=COLOR(RGB,rand()/10^12,rand()/10^12,rand()/10^12));
> display({p(-1/2),p(1/2),p(0),p(1),p(2),p(3)});
```




```
> assume(alpha>-1);int(f(alpha,x),x=0..infinity);
```

$$\Gamma(\alpha\sim)\,\alpha\sim$$

Remarques :

1) Si $\alpha \geq 0$, l'intégrale n'est pas impropre en 0+, mais cela n'a guère d'importance.

2) Notons $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}.dx$ la valeur de cette intégrale.

Une intégration par parties montre que $\forall \alpha > -1 \quad F(\alpha + 1) = (\alpha + 1).F(\alpha)$.

Comme F(0) = 1, on en déduit que $F(n) = n\,!$ pour tout entier naturel n.

La fonction F prolonge la fonction factorielle. Parmi tous les prolongements de la factorielle, c'est de loin le plus intéressant.

Exercice 2 : Etude d'une transformée de Laplace.

Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $F(x) = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^2.e^{-xt}.dt$.

1) Montrer que F est continue sur [0, +∞[
2) Montrer que F est deux fois dérivable sur]0, +∞[.
3) Montrer que $F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

[Indication : utiliser l'identité $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{2-e^{2it}-e^{-2it}}{4}$.]

4) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

<u>Solution</u> :

0) <u>Domaine de définition de F</u>.

La fonction $f(t) = (\frac{\sin t}{t})^2$ est définie, continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Elle est prolongeable par continuité en 0, car elle tend vers 1 en 0+.

Ainsi prolongée, elle est même C^∞, et même développable en série entière en 0.

De plus elle est bornée : $0 \le f(t) \le 1$,

et intégrable, car $0 \le f(t) \le \varphi(t)$ où $\varphi(t) = 1$ sur $[0, 1]$, $\frac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$.

Il en résulte que sa transformée de Laplace $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-xt}.dt$ est définie pour tout $x \ge 0$.

1), 2) et 3) <u>Propriétés de F sur son domaine</u>.

La fonction $\phi : (x, t) \to f(t).\, e^{-xt}$ vérifie :

(H 1) Pour tout $x \ge 0$, $t \to \phi(x, t)$ est intégrable ;

(H 2) Pour tout $t \ge 0$, $x \to \phi(x, t)$ est continue ;

(H 3) Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[^2$ $|\phi(x, t)| \le f(t)$, majorante intégrable.

F est continue sur $[0, +\infty[$ en vertu du théorème de continuité des intégrales impropres à paramètres.

La fonction $\phi : (x, t) \to f(t).\, e^{-xt}$ a des dérivées partielles en x d'ordre 1 et 2 :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t) = -\, t\, f(t)\ e^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t) = \sin^2 t\ e^{-xt}.$$

(H 1) Pour tout $x \ge 0$, $t \to \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$;

(H 2) Pour tout $t \ge 0$, $x \to \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $]0, +\infty[$;

(H 3) Pour tout $a > 0$ et tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right| \le t\, f(t)\ e^{-at} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \sin^2 t\ e^{-at}, \text{ majorantes intégrables.}$$

En vertu du théorème de dérivation des intégrales impropres à paramètres, F est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$, et $F''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2 t.e^{-xt}.dt$.

Calculons $F''(x)$ par la technique de linéarisation indiquée :

On a en effet, $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{2-e^{2it}-e^{-2it}}{4}$. Donc :

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2 t.e^{-xt}.dt = \int_0^{+\infty} \frac{2-e^{2it}-e^{-2it}}{4}.e^{-xt}.dt$$

$$= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty} e^{(-x+2i)t}.dt = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{1}{-x+2i} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}.$$

<u>Conclusion</u> : F est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0 \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2 t.e^{-xt}.dt = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}.$$

Il en résulte que $\quad F'(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + a$,

puis $\quad F(x) = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \text{Arctan}\frac{x}{2} + ax + b$.

L'étude en $+\infty$ va permettre de trouver a et b.

4) <u>Limite de F en +∞</u>.

Pour la limite, point n'est besoin de recourir au théorème de convergence dominée (admis).

Il suffit de noter que $0 \le F(x) \le \int_0^{+\infty} e^{-xt}.dt = \frac{1}{x}$.

Comme $F(x) = -\frac{1}{4}x\ln(1+\frac{4}{x^2}) + b - \text{Arctan}\frac{x}{2} + ax$, on en déduit que $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$.

<u>Conclusion</u> : $\forall x \ge 0 \;\; F(x) = \int_0^{+\infty}(\frac{\sin t}{t})^2.e^{-xt}.dt = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \text{Arctan}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.

<u>Conséquences</u> :

- $F(0) = \int_0^{+\infty}(\frac{\sin t}{t})^2.dt = \frac{\pi}{2}$. On en déduit, par IPP : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$.
- $F(1) = \int_0^{+\infty}(\frac{\sin t}{t})^2.e^{-t}.dt = -\frac{1}{4}\ln 5 - \text{Arctan}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$, etc.

<u>Remarque</u> dédiée à Jean-Yves S. : le problème de Centrale M 1986 étudie plus généralement les transformées de Laplace $\int_0^{+\infty}(\frac{\sin t}{t})^{2n}.e^{-xt}.dt$. Souvenirs, souvenirs…

<u>Feuille de calcul Maple</u> :

Maple 7 ne sait pas trouver la transformée de Laplace de $f(t)$. Il faut lui mâcher le travail comme dans le problème.

```
> with(inttrans);
```

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*]

```
> f:=t->(sin(t)/t)^2;
> laplace(f(t),t,x);
Error, (in GAMMA) numeric exception: division by zero
> G:=convert(laplace(sin(t)^2,t,x),parfrac,x);
```

$$G := \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+4}$$

```
> F:=x->int(int(G,x)+a,x)+b;F(x);
```

$$F := x \to \int \int G\,dx + a\,dx + b$$

$$\frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + a\,x + b$$

```
> limit(F(x),x=0);limit(F(x),x=infinity);
```

$$b$$

$$\text{signum}(a)\,\infty$$

```
> int((sin(t)/t)^2,t=0..infinity);assign({a=0,b=Pi/2});F(x);
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\pi$$

```
> invlaplace(F(x),x,t);
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{invlaplace}(x\ln(x),x,t)-\frac{1}{4}\,\mathrm{invlaplace}(x\ln(x^2+4),x,t)+\frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}$$

```
> dl:=series(f(t),t=0,17);laplace(dl,t,x);
```

$$dl := 1-\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{45}t^4-\frac{1}{315}t^6+\frac{2}{14175}t^8-\frac{2}{467775}t^{10}+\frac{4}{42567525}t^{12}-\frac{1}{638512875}t^{14}+\mathrm{O}(t^{16})$$

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\,\frac{1}{x^3}+\frac{\frac{16}{15}}{x^5}-\frac{16}{7}\,\frac{1}{x^7}+\frac{\frac{256}{45}}{x^9}-\frac{512}{33}\,\frac{1}{x^{11}}+\frac{\frac{4096}{91}}{x^{13}}-\frac{2048}{15}\,\frac{1}{x^{15}}$$

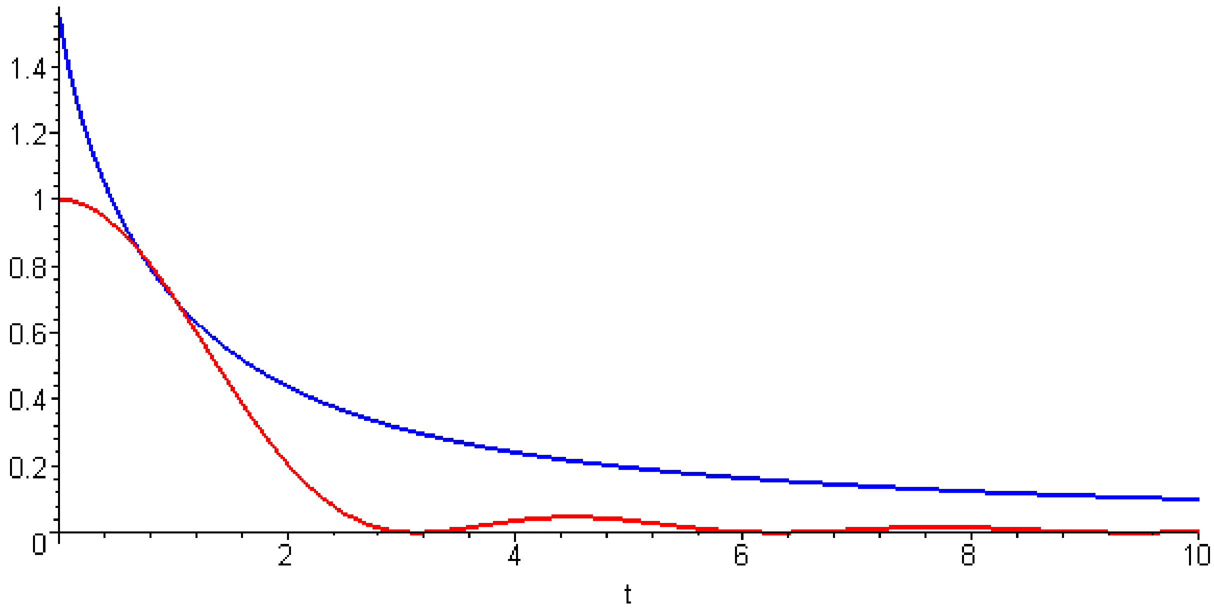
```
> asympt(F(x),x,17);
```

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\,\frac{1}{x^3}+\frac{\frac{16}{15}}{x^5}-\frac{16}{7}\,\frac{1}{x^7}+\frac{\frac{256}{45}}{x^9}-\frac{512}{33}\,\frac{1}{x^{11}}+\frac{\frac{4096}{91}}{x^{13}}-\frac{2048}{15}\,\frac{1}{x^{15}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{16}}\right)$$

```
> series(F(x),x=0,10);
```

$$\frac{1}{2}\pi+\left(-\frac{1}{4}\ln(4)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(x)\right)x-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{640}x^5-\frac{1}{5376}x^7+\frac{1}{36864}x^9+\mathrm{O}(x^{10})$$

```
> with(plots):p:=plot(f(t),t=0..10,thickness=2):
q:=plot(F(x),x=0..10,thickness=2,color=blue):display({p,q});
```



Graphes de *f*(t) et de sa transformée de Laplace F(*x*)

Maple calcule F(x), mais il resterait à comprendre ceci :

```
> int((sin(t)/t)^2*exp(-x*t),t=0..infinity);
```

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{4}(x\ln(x+2I)\,t-2\,x\,\mathrm{Ei}(1,x\,t)\,t+x\,\mathrm{Ei}(1,(x+2I)\,t)\,t-2\,x\ln(x)\,t$$
$$+x\ln(-2I+x)\,t+x\,\mathrm{Ei}(1,(-2I+x)\,t)\,t-\mathbf{e}^{(-(x+2I)\,t)}-\mathbf{e}^{(-(-2I+x)\,t)}$$
$$+2I\,\mathrm{Ei}(1,(x+2I)\,t)\,t+2\,\mathbf{e}^{(-x\,t)}-2I\,\mathrm{Ei}(1,(-2I+x)\,t)\,t-2I\ln(-2I+x)\,t$$
$$+2I\ln(x+2I)\,t)/t$$

Exercice 3 : Equation des cordes vibrantes.

Utiliser la transformation de Fourier pour résoudre l'équation de la corde vibrante :

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbf{R} \\ u(0, x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbf{R} \\ u_t(0, x) = v(x) \text{ pour } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

[Indication : La transformée de Fourier de la fonction $f_a(x) = 1$ si $-a \leq x \leq a$, 0 sinon,

est $F_a(\xi) = 2\dfrac{\sin(a\xi)}{\xi}$.]

__Solution__ taupine :

Le changement de variables p = x + t, q = x – t, permet de résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ devient $\dfrac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = 0$ (règle de la chaîne), donc

$$u(t, x) = f(x + t) + g(x - t) \ , \ \text{où } f \text{ et } g \text{ sont de classe } C^2.$$

Pour tout x, $u(0, x) = f(x) + g(x) = 0$, donc $g = -f$ et $u(t, x) = f(x + t) - f(x - t)$.

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f'(x + t) + f'(x - t)$, donc $2.f'(x) = v(x)$ et $f(x) = \dfrac{1}{2}V(x)$, où V est une primitive de v. Ainsi $u(t, x) = \dfrac{1}{2}[\, V(x + t) - V(x - t)\,]$.

Avec Maple :

```
> with(DEtools);
> ecv:=diff(u(t,x),t,t)-diff(u(t,x),x,x)=0;
```

$$ecv := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)\right) = 0$$

```
> pdsolve(ecv);
```

$$u(t, x) = \_F1(x + t) + \_F2(x - t)$$

```
> u:=(t,x)->f(x+t)+g(x-t);
```

$$u := (t, x) \to f(x + t) + g(x - t)$$

```
> u(0,x)=0;
```

$$f(x) + g(x) = 0$$

```
> u:=(t,x)->f(x+t)-f(x-t);
```

$$u := (t, x) \to f(x + t) - f(x - t)$$

```
> diff(u(t,x),t);
```

$$D(f)(x + t) + D(f)(x - t)$$

__Solution formelle par transformation de Fourier__.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x).e^{-ix\xi}.dx \ - \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).e^{-ix\xi}.dx \ = 0.$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x).e^{-ix\xi}.dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x).e^{-ix\xi}.dx$ par dérivation sous le signe somme

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).e^{-ix\xi}.dx = -\xi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x).e^{-ix\xi}.dx$ par deux IPP.

Donc $\displaystyle\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x).e^{-ix\xi}.dx \ + \xi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x).e^{-ix\xi}.dx \ = 0$

Equation différentielle en t qui se résout en :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x).e^{-ix\xi}.dx \ = A(\xi).\cos(\xi t) + B(\xi).\sin(\xi t).$$

Or $\displaystyle 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0,x).e^{-ix\xi}.dx \ = A(\xi).$

Et $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x).e^{-ix\xi}.dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x).e^{-ix\xi}.dx$ = ξ.B(ξ).cos(ξt).

Si t = 0, il vient $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(0,x).e^{-ix\xi}.dx = \int_{-\infty}^{+\infty}v(x).e^{-ix\xi}.dx = \hat{v}(\xi) = \xi.B(\xi)$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x).e^{-ix\xi}.dx = \hat{v}(\xi)\frac{\sin(\xi t)}{\xi} = \frac{1}{2}\hat{v}(\xi).\,\mathcal{F}(f_t)(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(v * f_t)(\xi)$.

Par conséquent

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(v * f_t)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}v(x-s)f_t(s).ds = \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t}v(x-s).ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}v(s).ds = \frac{1}{2}(\,V(x+t) - V(x-t)\,)$$

et l'on retombe sur nos pattes.

Remarque : tout cela est hautement fantaisiste, et me rappelle cette boutade de Hilbert, à qui l'on annonça qu'un de ses étudiants était devenu poète :

« *Poète, vraiment ?Evidemment, il n'avait pas assez de fantaisie pour devenir mathématicien…* »