Résumé cours Maths 4 du 23 octobre 2015

Chapitre 3. Théorie des distributions (suite)

1. (Rappel) Une distribution est une application $\varphi \mapsto T(\varphi)$ avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, qui est linéaire et "continue". La continuité, qui est l'exigence principale de cette définition, sera considérée comme toujours satisfaite et n'a pas été rigoureusement définie.

2. Exercice travaillé. Les fonctions a) $\varphi(x) = x$; b) $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ n'appartiennent pas à $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

3. (Rappel) Une fonction f définit une distribution si (et seulement si) nous avons $f \in L^1([a,b])$ pour tous a, b. Dans ce cas, la distribution associée à f est donnée par la formule $f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$.

4. Exercice travaillé. Soient respectivement a) $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$ et b) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Alors la fonction f de a) définit une distribution, mais pas celle de b).

5. (Rappel) Opérations avec les distributions :
   a) $(a\,T)(\varphi) = T(a\,\varphi)$ (avec T distribution et $a \in C^\infty$) ;
   b) $T'(\varphi) = -T(\varphi')$.
   c) En général, pour définir une opération avec les distributions, on calcule le résultat si T est donnée par une fonction (C^∞, si nécessaire), puis on impose que le résultat reste vrai dans le cas général.

6. Exercice travaillé : la définition de T' suit le point c) ci-dessus, au sens où $f'(\varphi) = -f(\varphi')$ si $f \in C^1$.

7. Exercice travaillé. Calculer $(\ln|x|)'$. Réponse : $(\ln|x|)' = \text{v. p. } \frac{1}{x}$, où

$$\text{v. p. } \frac{1}{x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx \right\}.$$

   Remarques :
   (i) v. p. = valeur principale.
   (ii) l'action de v. p.$\frac{1}{x}$ ressemble à celle de $\frac{1}{x}$, mais nous savons que $\frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution.

8. Exercice travaillé. Calculer $x\,\text{v. p. } \frac{1}{x}$. Réponse : 1.

9. Exercice travaillé. Trouver la définition de $\widehat{T}(\varphi)$. Réponse : $\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$, car cette égalité est vraie si T est donnée par une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

   Remarques :
   (i) Dans la définition correcte, φ n'est pas dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$, mais dans un espace plus grand, contenant à la fois $C_c^\infty(\mathbb{R})$ et les gaussiennes (fonctions de la forme e^{-ax^2}, avec $a > 0$ constante). Il s'agit de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Ce point ne sera pas détaillé.
   (ii) On ne peut pas définir la transformation de Fourier de toutes les distributions. Mais toutes les distributions concrètes considérées jusqu'ici ont une transformation de Fourier définie comme ci-dessus : 1, H, δ_0, $|x|$, $e^{-|x|}$, $\dfrac{1}{1+x^2}$, $\ln|x|$, v. p. $\dfrac{1}{x}$.
   (iii) Concrètement, pour calculer $\widehat{T}$ pour une distribution T usuelle : on utilise le fait que la formule de $T(\zeta)$, $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, reste valable quand $\zeta = \widehat{\varphi}$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.