Résumé cours–TD Maths 4 du 5 novembre 2015

Chapitre 3. Théorie des distributions (suite)

1. Preuve travaillée : la formule d'inversion de Fourier sous la forme suivante :
   si $f \in L^1(\mathbb{R})$, f continue et bornée, et si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors
   $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$
   À retenir : l'étude des intégrales dépendant d'un paramètre (avec deux hypothèses à vérifier : domination et continuité).

2. Remarque : la formule d'inversion s'applique à $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

3. "Principe d'incertitude" : on ne peut pas avoir à la fois $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (sauf si $\varphi = 0$).

4. Conséquence : la "définition" $\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, n'a pas de sens, car $T(\widehat{\varphi})$ n'a pas de sens.

   Pour y remédier, on considère uniquement des T qui agissent sur un espace plus grand que $C_c^\infty(\mathbb{R})$. IL s'agit de l'"espace de Schwartz" $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, qui contient à la fois les $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, les $\widehat{\varphi}$ avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, et les gaussiennes e^{-ax^2}, a constante > 0.

   Concrètement, tous les T usuels agissent sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

5. Un point important est que la formule d'inversion est valable pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

6. Exercice travaillé : calculer
   - $\widehat{\delta_0}$. R.: $\widehat{\delta_0} = 1$.
   - $\widehat{1}$. R.: $\widehat{1} = 2\pi\,\delta_0$.
   - $\widehat{T'}$. R.: $\widehat{T'} = \imath\,\xi\,\widehat{T}$.
   - $\widehat{x}$. R.: $\widehat{x} = 2\imath\,\pi\,\delta_0'$.

7. Limite de distributions. On a, par définition :
   $T_n \to T$ si $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ quand $n \to \infty$, $\forall\,\varphi$.
   $T_\varepsilon \to T$ si $T_\varepsilon(\varphi) \to T(\varphi)$ quand $\varepsilon \to 0$, $\forall\,\varphi$.

8. Exercice travaillé. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$. R. : $\sin nx \to 0$.

9. Exercices à travailler :
   a) Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \rho_\varepsilon$, où $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$ et $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(x/\varepsilon)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{x + \imath\varepsilon}$.