Résumé cours–TD Maths 4 du 6 novembre 2015

Chapitre 3. Théorie des distributions (suite)

1. (Item du 4 novembre) Théorème de Plancherel : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $f \in L^2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$), alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

   - Analogie avec l'identité de Parseval, que nous rappelons. Si $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ a les coefficients de Fourier $c_n(f) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\imath n x} f(x)\, dx$, alors

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

   - Preuve travaillée du théorème de Plancherel sous l'hypothèse supplémentaire que f vérifie la formule d'inversion de Fourier.

2. Retour sour l'exercice travaillé suivant : Calculer $\lim_{n\to\infty} \sin nx$ (la limite étant calcuée au sens de $T_n \to T$). R. : $\sin nx \to 0$.
   - Une autre notion possible de convergence est celle de convergence simple : $\sin nx \to f$ si $\sin nx \to f(x)$ quand $n \to \infty$ pour tous les x. Or, la suite $(\sin nx)$ n'a pas de limite simple.
   - La notion pertinente physiquement n'est pas celle de limite simple, mais celle de limite au sens de $T_n \to T$ (appelée limite au sens des distributions).

3. Exercice travaillé. Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0+} \rho_\varepsilon$, où $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$ et $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(x/\varepsilon)$. R. δ_0.

4. Exercice travaillé. Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2}$. R. v. p. $\dfrac{1}{x}$.

5. Exercice travaillé. Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{1}{x+\imath\varepsilon}$. R. v. p. $\dfrac{1}{x} - \imath\pi\delta_0$ (formule de Plemelj).

6. Convolution de deux distributions, T et S.
   - Définition : $T * S(\varphi) := T\big(S(\varphi(y+\cdot))\big)$.
   - Cette définition n'a pas forcément un sens. Même pour les distribution usuelles T et S considérées jusqu'ici, on ne peut pas toujours définir $T * S$.

- Exercice travaillé. Calculer $T * \delta_0$ et $\delta_0 * T$. R. T.
- Sous des hypothèses qui ne seront pas discutées, nous avons $T * S = S * T$ et $\widehat{T * S} = \widehat{T}\widehat{S}$.

7. Exercice travaillé. Calculer $(T * S)'$. R. $(T * S)' = T' * S = T * S'$.
8. Le rôle de la convolution dans la résolution des équations. Exemple : pour résoudre $u'' - 3u' + 2u = f$, on cherche une distribution E telle que $\widehat{E} = \dfrac{1}{2 - \xi^2 - 3\imath\xi}$, et on a alors une solution $u = E * f$.