# Cours du 22 septembre 2016

## Chapitre 1. Intégration

**II. Intégrales généralisées.** Le contexte est le suivant : on se donne une fonction *continue* $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ et on étudie la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

La méthode la plus simple consiste à chercher une fonction convenable *continue* et *positive* $g : [a, b[ \to [0, \infty[$ et de comparer $f$ à $g$. Les trois résultats de base à utiliser sont les suivants (avec $C$ une constante).

**Théorème de comparaison (I).**

a) Si $|f(x)| \leq C\, g(x), \forall\, x \in [a, b[$, et si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge.

a) Si $f(x) \geq C\, g(x), \forall\, x \in [a, b[$ (avec $C > 0$), et si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = \infty$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \infty$.

**Théorème de comparaison (II).**

a) Si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \nearrow b$, et si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge.

a) Si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \nearrow b$, et si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = \infty$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \infty$.

**Théorème de comparaison (III).**

a) Si $\displaystyle\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, avec $C \in \mathbb{R}$, et si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge.

a) Si $\displaystyle\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, avec $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{-\infty, \infty\}$, et si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = \infty$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \pm\infty$ (selon le signe de $C$).

**Exercice travaillé.** Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^\infty \frac{1 - \sin x}{x^2}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{x}\, dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

**Intégration par parties.** Cette technique peut être utile pour montrer la convergence d'intégrales contenant du $\sin$ ou $\cos$. Exercice travaillé : montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

**Exercice à faire.** Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

**III. Limites et intégrales.** Le contexte est le suivant : on se donne des fonctions *continues* $f_n : I \to \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle d'extrémités $a < b$, et on cherche à calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$. Les principaux résultats pour calculer cette limite sont les suivants.

**Théorème de convergence dominée (de Lebesgue) ; TCD.** Si
$f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$, $\forall\, x \in I$ ;
$|f_n(x)| \le g(x)$, $\forall\, n$, $\forall\, x \in I$ ;
$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge,
alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

**Théorème de convergence monotone (de Beppo Levi) ; TCM.** Si
$f_n(x) \ge 0$, $\forall\, n$, $\forall\, x \in I$ ;
$f_n(x) \nearrow f(x)$ quand $n \to \infty$, $\forall\, x \in I$,
alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

**Théorème.** Si
$\displaystyle\sum_n \int_a^b |f_n(x)|\,dx < \infty$, alors $\displaystyle\sum_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_n f_n(x)\,dx$.

**Théorème.** Si
$f_n(x) \ge 0$, $\forall\, n$, $\forall\, x \in I$,
alors $\displaystyle\sum_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_n f_n(x)\,dx$.

**Théorème.** Si
$f_n(x) \searrow 0$, $\forall\, x \in I$,
alors $\displaystyle\sum_n (-1)^n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_n (-1)^n f_n(x)\,dx$.

Dans tous les théorèmes qui précèdent, on peut remplacer l'exigence $\forall\, x \in I$ par $\forall\, x \in I \setminus A$, avec $A$ un ensemble soit fini, soit dont les éléments forment une suite.

**Exercice travaillé.** Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx,\ \lim_{n\to\infty} \frac{n\, x}{1+n^2\, x^2}\, dx,\ \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+e^{-nx}}\, dx,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n\, e^{-2x}\, dx.$$