Cours du 6 octobre 2016

Chapitre 2. Produit de convolution. Transformée de Fourier

1. Définition de $\rho_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(t/\varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, et esquisse de son graphe quand ρ est C^1 par morceaux et s'annule en dehors d'un intervalle borné.
2. Énoncé vague : si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,dt = 1$, alors $f * \rho_\varepsilon \to f$, $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \to f, \ldots$, quand $\varepsilon \to 0$, et ces fonctions sont de plus en plus lisses :
   — $f * \rho_\varepsilon$ est continue, et si f est déjà continue alors $f * \rho_\varepsilon$ est de classe C^1 ;
   — $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ est de classe C^1, et si f est déjà continue alors $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ est de classe C^2, etc.
   Nous avons précisé les hypothèses sur f et ρ et le sens de la convergence dans quelques cas particuliers.
3. La propriété ci-dessus s'applique pour « lisser » un signal.
4. Exemple travaillé : $f(t) = |t|$, $\rho(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1 \\ 1/2, & \text{si } -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{si } t > 1 \end{cases}$.
5. Exemple laissé en devoir maison : même ρ, et f = la fonction de Heaviside, càd $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$.
   Calculer $f * \rho_\varepsilon$ et $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ et examiner graphiquement ce qui se passe quand $\varepsilon \to 0$.
6. Calcul de $\widehat{\rho}$, où ρ est la fonction du point 4 ci-dessus.
7. $\widehat{f'}(\xi) = \imath\xi\,\widehat{f}(\xi)$ si $f \in C^1$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
8. $\widehat{xf}(\xi) = \imath\,\widehat{f}\,'(\xi)$, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $xf \in L^1(\mathbb{R})$, avec une idée de preuve si f est continue et s'annule en dehors d'un intervalle $[a, b]$.
9. $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\xi)$ (avec preuve).
10. Théorème d'inversion (ou formule d'inversion) : si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et f est continue, alors $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi$.
11. Application : calcul de $\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}}(\xi)$.
12. Théorème de Plancherel.