Cours du 20 octobre 2016 et cours – TD du 21 octobre 2016

Chapitre 4. Théorie des distributions

1. Motivation : l'impulsion de Dirac.
2. L'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. L'espace $L^1_{loc}(I)$.
3. $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ contient : $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R})$.
4. Une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ agit sur $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ par la formule $T_f(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$.
5. Une distribution est une application $\varphi \mapsto T(\varphi)$ avec $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, qui est linéaire et « continue ». La continuité, qui est l'exigence principale de cette définition, sera considérée comme toujours satisfaite et n'a pas été rigoureusement définie. Elle est en particulier satisfaite par T_f et par la masse de Dirac δ (ou δ_0).
6. Exemples de distributions : l'impulsion de Dirac, δ_a, le peigne de Dirac de période T, Ш_T.
7. Opérations avec les distributions :
   a) $(a\,T)(\varphi) = T(a\,\varphi)$ (avec T distribution et $a \in C^\infty$) ;
   b) $T'(\varphi) = -T(\varphi)$;
   c) En général, pour définir une opération avec les distributions, on calcule le résultat si T est donnée par une fonction (C^∞, si nécessaire), puis on impose que le résultat reste vrai dans le cas général.
8. Exercices travaillés. Calculer :
   (a) $|x|'$.
   (b) H'.
   (c) $x\,\delta$,
   (d) $x\,(|x|')$.
   (e) $x\,(\ln|x|)'$.
9. Calcul de $(T_f)'$ quand f est de classe C^1 par morceaux. (Deux cas : f continue, f discontinue.)
10. Toute distribution admet une primitive.
    Au passage, nous avons établi le résultat suivant.
11. **Lemme.** Une fonction $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0$ a une primitive $\xi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$.