Fiche 1

UE : Math 4

Révisions sur les intégrales impropres

1. En utilisant la définition d'une intégrale impropre, étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \ln t \, dt, \int_0^{+\infty} e^{-4t} \, dt \, , \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt.$$

2. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \, , \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \, dt \, , \int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \, dt \, , \int_0^{\pi} \ln(\sin t) \, dt, \int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \, dt,$$

$$\int_0^2 \ln t \, dt \, , \int_0^1 \sin(1/t) \, dt \, , \int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \, dt \, , \int_{-2}^{+2} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} \, dt \, , \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \ln(\cos(1/t)) \, dt,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \, , \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \, , \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \text{ (avec } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\text{)},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \text{ (avec } a > 0\text{)},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-x} \, dx.$$

3. **Intégrales de Bertrand**

1. Soit a un nombre réel. Étudier la convergence de l'intégrale :
$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a} \, dt.$$
2. Que pensez-vous de l'intégrale suivante :
$$\int_{2009}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a} \, dt \; ?$$
3. Soit a et b deux paramètres réels . Discuter selon leur valeur de la convergence de l'intégrale :
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a (\ln t)^b} \, dt.$$

4. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est **absolument intégrable** sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale suivante est convergente, ce qu'on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt < +\infty.$$

1. Que peut-on dire des limites en $-\infty$ et $+\infty$ d'une fonction sommable sur $\mathbb{R}$?
2. Si f est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ et α un réel, alors la fonction $t \mapsto f(t)e^{-i\alpha t}$ est sommable sur $\mathbb{R}$ aussi. Pourquoi ?