UE : Math4

Fiche 2

Convergence d'une suite de fonctions
Théorème de convergence dominée de Lebesgue
Continuité et dérivation sous le signe $\int$

1. Convergence simple

Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur I si :

$$\text{pour tout } t \in I,\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

On dit que f est la **limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Étudiez la limite simple sur $[0, +\infty[$ des trois suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(t) = \dfrac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)}$, $t \in [0, +\infty[$
2. $f_n(t) = \dfrac{1}{t^n + e^t}$, $t \in [0, +\infty[$
3. $f_n(t) = \dfrac{n\ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}$, $t \in [0, +\infty[$

2. Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications[1] de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I.
S'il existe une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que :

$$\text{pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } t \in I,\ |f_n(t)| \leq \phi(t),$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I, f est intégrable sur I et :

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Applications

1. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)}\,dt$$

et déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)}\,dt.$$

2. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^n + e^t}$$

et calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dt}{t^n + e^t}.$$

3. Même question pour

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{n\ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

3. Continuité et dérivabilité sous $\int$

1. **Théorème de continuité sous le signe $\int$.**
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction définie sur $I \times J$ telle que, pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur J.
   S'il existe une fonction ϕ positive et **intégrable** sur I telle que

   $$\forall (t,x) \in I \times J,\ |f(t,x)| \leq \phi(t),$$

   alors

   $$F : x \mapsto F(x) = \int_I f(t,x)dt$$

   est continue sur J.

2. **Théorème de dérivabilité sous le signe $\int$.**
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction définie sur $I \times J$ telle que, pout tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur J (sa dérivée est notée $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$).
   S'il existe une fonction ϕ positive et **intégrable** sur I telle que

   $$\forall (t,x) \in I \times J,\ \left| \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \right| \leq \phi(t),$$

   alors $F : x \mapsto F(x) = \int_I f(t,x)dt$ est dérivable sur J et

   $$F'(x) = \int_I \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt.$$

   Si de plus $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ est continue sur J, alors F' aussi : on dit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ (ou «continûment dérivable»).

3. **Applications**
   (a) On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par :

   $$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}.$$

   i. Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
   ii. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
   iii. Exprimer F à l'aide de fonctions connues et retrouver les résultats précédents.
   iv. Calculer la limite de $F(x)$ quand x tend vers l'infini.

   (b) On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale :

   $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin tx}{1+t^4} dt$$

   i. Montrer que cette intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On la note $F(x)$. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   ii. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
   iii. Vérifier que F est solution de l'équation différentielle :

   $$y^{(4)} + y = \frac{x}{1+x^2}.$$