Feuille d'exercices n° 5

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

1. Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

2. Écrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 2. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$ puis l'on définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

2. En déduire des expressions de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$.

2. En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 4.

1. Soit a et b deux nombres complexes.

   (a) Montrer que $\mathrm{Re}(\bar{a}b) = \mathrm{Re}\left(\bar{b}a\right)$.

   (b) Exprimer $\mathrm{Re}(\bar{a}b)$ à l'aide de formes trigonométriques de a et b, puis à l'aide des formes algébriques de a et b.

   (c) Montrer que $|\,\mathrm{Re}(\bar{a}b)| \;\leq\; |a||b|$.

   (d) Déterminer le cas d'égalité dans l'inégalité précédente et l'exprimer à l'aide de formes trigonométriques de a et b.

   (e) Montrer que
   $$|a+b|^2 \;=\; |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}b) + |b|^2\ .$$

   (f) Démontrer l'identité du parallélogramme
   $$|a+b|^2 \;+\; |a-b|^2 \;=\; 2\left(|a|^2+|b|^2\right)\ .$$

2. Montrer que, pour tout $(a,b,z) \in \mathbf{C}^3$, on a :
$$|z-a|^2 \leq |z-b|^2 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathrm{Re}\left(\overline{\left(z-\frac{a+b}{2}\right)}\,(b-a)\right) \leq 0\ .$$

Exercice 5. On rappelle l'identification canonique de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array}.$$

1. Rappeler l'effet sur $\mathbf{C}$ des transformations du plan suivantes :
   (a) pour $a \in \mathbf{C}$, la translation du vecteur d'affixe a ;
   (b) pour $(a, \lambda) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre d'affixe a ;
   (c) pour $(a, \theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, la rotation d'angle θ et de centre d'affixe a ;
   (d) pour $(a, \theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, la symétrie par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par un point d'affixe a.
2. Déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.
   (a) $\varphi_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3.$
   (b) $\varphi_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto i\,\bar{z}.$
3. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
4. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 6. On note A le point d'affixe $4 + 2i$ et O celui d'affixe 0.
Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que soient alignés les points d'affixes z, iz et i.

Exercice 8.

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & - & by & = & c \\ bx & + & ay & = & d \end{array} \right. .$$

Exercice 9. *Réduction de $a\cos x + b\sin x$.*

1. Soit a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \theta).$$

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 10.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Indication : utiliser la formule du binôme de Newton.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ impair, exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ pair. Exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, et faire de même en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) .$$

Exercice 12. Récrire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'expression $(\cos 5x)(\sin 3x)$ comme combinaison linéaire de cosinus et de sinus.

Exercice 13. Déterminer algébriquement les racines carrées respectives de $7 + 24i$ et $9 + 40i$.

Exercice 14.

1. Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1 + i)$.
2. En déduire des expressions de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 15. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$;
2. $z^2 + 3z + 3 = 0$;
3. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 16. On cherche à résoudre en $z \in \mathbf{C}$ l'équation

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i \ = \ 0 .$$

1. Déterminer une racine réelle z_0 de l'équation.
2. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, factoriser $z - z_0$ en $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$.
3. Résoudre l'équation en $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 17. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -8i$;
2. $z^5 - z = 0$;
3. $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$;
4. $z^2 \bar{z}^7 = 1$;
5. $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.
2. Calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.
3. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 19. Décrire les ensembles suivants :

1. $\{ z \in \mathbf{C} \mid z^2 + 2z - 3 \in \mathbf{R} \}$;
2. $\left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{-3\} \;\middle|\; \left| \dfrac{z-3}{z+3} \right| < 2 \right\}$;
3. $\left\{ z \in \mathbf{C}^* \;\middle|\; \left| 1 - \dfrac{1}{z} \right|^2 = 2 \right\}$.