Exercices sur la théorie des distributions et l'analyse complexe

1. À f comme ci-dessous, peut-on associer une distribution T_f ?

$$\text{a) } f(x) = \ln|x|, \text{ b) } f(x) = e^x, \text{ c) } f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Justifier.

2. Calculer les primitives des distributions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \text{ b) } \delta_0 + \delta_1, \text{ c) } x\delta.$$

Justifier.

3. Résoudre l'équation $u' + a\,u = T$, avec :

$$\text{a) } a(x) = x^2, \ T = \delta, \text{ b) } a(x) = 1, \ T = \text{sgn } x.$$

4. Calculer :

$$\text{a) } (\sin|x|)', \text{ b) } (a\,H)', \text{ avec } a \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Justifier. Pour la dernière question, on exprimera la réponse en fonction de a'.

5. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\imath \varepsilon x} f, \text{ b) } \lim_{t \to \infty} \sin(tx) f, \text{ avec } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

6. Calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $f(x) = e^{-|x|}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

3. $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
4. $j(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

7.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique : $1+\imath$, $2\imath$, $-1+\imath$.
2. Interpréter géométriquement la transformation $w(z) = (1+\imath)z - 2$.
3. Montrer que la transformation $\mathbb{R} \ni t \mapsto \dfrac{t+\imath}{t-\imath}$ est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C} \setminus \{1\}$, où $\mathscr{C}$ est le cercle unité.

8. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{\cos z^2}{z}\,dz,\ \int_{\mathscr{C}} \frac{\cos z^2}{z^2}\,dz,\ \int_{\mathscr{C}} \left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz,\ n = 1,2,\ldots,5.$$

9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz$ en fonction de $f(0)$ et de $f'(0)$.

10. On définit la fonction $z \mapsto f(z) = \ln(1-z)$ en utilisant la détermination principale du logarithme.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(z)$.
3. Développer en série autour de l'origine d'abord $f'(z)$, puis $f(z)$.

11. Soit $r > 0$ un nombre $\neq 1$. Calculer, en fonction de r et n, la valeur de $\displaystyle\int_{\mathscr{C}(0,r)} \frac{1}{(z-1)^n}\,dz$.

12. Développer en série entière au voisinage de 0, et donner le rayon de convergence pour : $\cos z$, $\dfrac{1}{(a-z)(b-z)}$, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{1-z^k}$.

13. Développer en série de Laurent :

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k}$, avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dans $\{z\,;\, 0 < |z| < |a|\}$ et dans $\{z\,;\, |z| > |a|\}$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, avec $0 < |a| < |b|$, dans $\{z\,;\, 0 < |z| < |a|\}$, dans $\{z\,;\, |a| < |z| < |b|\}$, et dans $\{z\,;\, |z| > |b|\}$.

14. Calculer le résidu en $z = 1$ de $e^{z/(1-z)}$. [Indication : se ramener à un calcul en $z = 0$.]

15. Calculer les résidus de $z \mapsto \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ dans les points singuliers de cette fonction.

16. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath x}}{(x - a\,\imath)^2}\, dx$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

17. Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$. Calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} e^{1/(z-a)}\, dz$.