Analyse T4, TD n° 1 / Vendredi 16 septembre 2016

Intégrales généralisées

1. Résumé de cours.

2. Exercices.

Pierre-Jean Hormière

« Si vous avez tout compris, c'est que je n'ai pas été clair. »
Albert Einstein

1. Résumé de cours.

1.1. Intégration sur un segment.

On nomme segment un intervalle fermé borné de la droite réelle **R**.
Soient I = [a, b] un segment de **R**, f une fonction I $\to$ **R**.
Si f est à valeurs positives, on appelle intégrale de f sur le segment I l'aire du domaine

$$D = \{ (x, y) \in I\times\mathbf{R} \ ; 0 \leq y \leq f(x) \}.$$

On note alors $\int_a^b f(x).dx$ = Aire(D).

Si f est à valeurs réelles, on appelle intégrale de f sur le segment I la différence
de l'aire du domaine $D_+ = \{ (x, y) \in I\times\mathbf{R} \ ; 0 \leq f(x) \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \}$
et de l'aire du domaine $D_- = \{ (x, y) \in I\times\mathbf{R} \ ; f(x) \leq 0 \text{ et } f(x) \leq y \leq 0 \}$

On note alors $\int_a^b f(x).dx = \text{Aire}(D_+) - \text{Aire}(D_-)$.

Il s'agit de l'aire algébrique située entre l'axe Ox et le graphe de f. L'aire arithmétique est alors donnée par $\int_a^b |f(x)|.dx = \text{Aire}(D_+) + \text{Aire}(D_-)$.

Oui, mais comment définir et calculer cette aire, ces aires ? Cette aire, ces aires, sont-elles toujours définies ? En somme, quelles fonctions sont susceptibles d'intégration ?

Pendant vingt siècles, d'Eudoxe et Archimède à Pascal, les mathématiciens considéraient une subdivision de I, $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$, calculaient la somme des aires des tuyaux d'orgue

$S = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)$, où pour chaque indice k, ξ_k est un point quelconque du segment $[x_k, x_{k+1}]$,

puis faisaient tendre le pas de la subdivision σ, c'est-à-dire $|\sigma| = \max (x_{k+1} - x_k)$, vers 0.

On démontre que si f est **continue**, ou **continue par morceaux**, alors les sommes S ont une limite, et c'est cette limite que l'on nomme intégrale de f sur I. Pour des fonctions plus générales les sommes S n'ont pas toujours de limite, et donc l'intégrale n'existe pas toujours.

Ainsi, pour calculer l'aire $\int_a^b x^2.dx$ du domaine $D = \{ (x, y) \in I\times\mathbf{R} \ ; 0 \leq y \leq x^2 \}$, Archimède calcule la somme $S = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(\xi_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+\frac{k}{n}(b-a))^2$, puis fait tendre n vers 0. Il trouve $\frac{b^3-a^3}{3}$.

Essayez !…

Jusqu'en 1664, les mathématiciens n'avaient pas d'autre moyen de calculer des intégrales. La méthode était longue, fastidieuse, et ne fonctionnait que sur un nombre limité de fonctions. En 1665, Newton et Leibniz ont découvert indépendamment une méthode révolutionnaire pour calculer l'intégrale d'une fonction continue. Pour calculer $\int_a^b f(x).dx$, il suffit de disposer d'une primitive de f, c'est-à-dire d'une fonction F dont la dérivée est f. Et alors $\int_a^b f(x).dx$ = F(b) – F(a).

Ce théorème de Newton-Leibniz est aussi appelé théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, car il établit un pont entre calcul différentiel et calcul intégral. Le calcul d'une intégrale se ramène au calcul d'une primitive, c'est-à-dire d'une « antidérivée ». Ce théorème a fait faire à l'analyse un bon spectaculaire au $18^{\text{ème}}$ siècle. Cependant il s'est heurté à deux sortes de difficultés :

- Si toute fonction continue f a bien une primitive F, c'est-à-dire est une dérivée de F, les fonctions continues élémentaires, c'est-à-dire sommes, produits, quotients, composées de fonctions usuelles (fonctions rationnelles, logarithmes, exponentielles, puissances, sinus, cosinus, Arcsin, Arccos, Arctan, etc) n'ont pas toujours de primitives élémentaires. On peut alors enrichir le bestiaire des fonctions connues en lui adjoignant de nouvelles fonctions, exponentielles-intégrales, elliptiques, etc., mais cela demande du travail et de l'érudition.
- On a besoin d'intégrer des fonctions plus générales que les fonctions continues ou continues par morceaux à valeurs réelles : fonctions à valeurs complexes ou vectorielles, fonctions discontinues. Riemann, Darboux, Lebesgue, Kurzweil, Henstock, etc., se sont attelés à ces généralisations.

1.2. Calculs d'intégrales et de primitives.

Les deux méthodes principales pour calculer intégrales et primitives sont le changement de variables et l'intégration par parties.

Proposition 1 : Soit Φ une fonction de classe C^1 de I = [a, b] dans **R**. Pour toute fonction f continue de J = Φ(I) dans E, on a : $\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x).dx = \int_a^b f(\Phi(t)).\Phi'(t).dt$.

Preuve : Les fonctions y $\to \int_{\Phi(a)}^{\Phi(y)} f(x).dx$ et y $\to \int_a^y f(\Phi(t)).\Phi'(t).dt$ sont définies et de classe C^1 sur [a, b], la première en tant que composée. Elles ont même dérivée f(Φ(y)).Φ'(y) et même valeur en a.

Remarque : En pratique, ce théorème s'utilise dans les deux sens :

— dans le sens $\int_a^b f(\Phi(t)).\Phi'(t).dt = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x).dx$, il suffit de poser x = Φ(t) et le changement de variable « se fait tout seul » dans la forme différentielle ω = f(Φ(t)).Φ'(t).dt = f(x).dx.

Exemples : $\int_a^b \Phi(t).\Phi'(t).dt = \frac{\Phi(b)^2-\Phi(a)^2}{2}$, $\int_a^b \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}.dt = \ln|\Phi(b)| - \ln|\Phi(a)|$,

$\int_a^b \frac{\Phi'(t)}{\Phi^2(t)+1}.dt$ = Arctan $\Phi(b)$ – Arctan $\Phi(a)$, etc.

— dans le sens $\int_\alpha^\beta f(x).dx = \int_a^b f(\Phi(t)).\Phi'(t).dt$, où a = $\Phi^{-1}(\alpha)$ et b = $\Phi^{-1}(\beta)$, il faut s'assurer que Φ est C^1 et strictement monotone.

Exemples : calculer $\int\sqrt{1-x^2}.dx$, $\int\sqrt{1+x^2}.dx$ et $\int\sqrt{x^2-1}.dx$.

Proposition 2 : Soient u et v deux fonctions [a, b] → **C** de classe C^1 ; on a :

$$\boxed{\int_a^b u(x).v'(x).dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x).dx\,.}$$

Preuve : u.v est une fonction de classe C^1 sur [a, b], et (u.v)' = u'.v + u.v'.

Applications : intégrer les exponentielles-polynômes, calculs récurrents d'intégrales, intégrer certaines fonctions transcendantes, etc.

1.3. <u>Intégrales généralisées</u>.

Si I est un intervalle quelconque, mais non un segment, y a-t-il moyen de définir $\int_I f(x).dx$?

Ainsi, en quel sens peut-on affirmer que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$, que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}.dx = \sqrt{2\pi}$, etc. ?

Définitions : 1) Soient I = $[a, b[$ un intervalle semi-ouvert à droite, $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{[a,b[} f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$ converge si $\int_a^c f(x).dx$ a une limite quand $c \to b-0$. Cette limite se note alors $\int_{[a,b[} f(x).dx = \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x).dx$.

2) Soient I = $]a, b]$ un intervalle semi-ouvert à gauche, $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{]a,b]} f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$ converge si $\int_c^b f(x).dx$ a une limite quand $c \to a+0$. Cette limite se note alors $\int_{]a,b]} f(x).dx = \lim_{c\to a+0} \int_c^b f(x).dx$.

3) Soient I = $]a, b[$ un intervalle ouvert, $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{]a,b[} f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$ converge si $\int_c^d f(x).dx$ a une limite quand $c \to a+0$ et $d \to b-0$ <u>indépendamment</u>. Cette limite double se note alors $\int_{]a,b[} f(x).dx = \lim_{c\to a+0, d\to b-0} \int_c^d f(x).dx$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x).dx$ est **divergente** si $\int_a^c f(x).dx$, resp. $\int_c^b f(x).dx$, resp. $\int_c^d f(x).dx$, sont sans limite. On ne peut alors leur attribuer de valeur.

Ces définitions s'étendent au cas où f est continue par morceaux sur tout segment $[c, d] \subset$ I.

Remarque importante : Le symbole $\int_I f(x).dx$ désigne deux objets bien distincts : l'intégrale impropre $\int_I f(x).dx$, qui peut converger ou diverger, et sa valeur, en tant que limite, en cas de convergence. Il en de même dans la théorie des séries. Quand on écrit « $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{6}$ », le symbole $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ désigne d'abord la série de terme général $1/n^2$, puis sa valeur, c'est-à-dire la valeur exacte de $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, car la série converge.

Critère de troncature : Si I = $]a, b[$, et c est un point quelconque tel que $a < c < b$, alors $\int_{]a,b[} f(x).dx$ converge ssi $\int_{]a,c]} f(x).dx$ et $\int_{[c,b[} f(x).dx$ convergent, et alors :

$$\int_{]a,b[} f(x).dx = \int_{]a,c]} f(x).dx + \int_{[c,b[} f(x).dx .$$

En pratique, quand l'intégrale est impropre en a et b, étudier séparément $\int_{]a,c]} f(x).dx$ et $\int_{[c,b[} f(x).dx$, c étant un point quelconque tel que $a < c < b$.

Exemples importants :

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}.dx$ <u>converge, et vaut 1</u>. En effet, $\int_0^A e^{-x}.dx = 1 - e^{-A} \to 1$ quand A $\to +\infty$.

Plus généralement $\int_0^{+\infty} e^{-ax}.dx$ converge ssi $a > 0$, et vaut alors $1/a$.

Exercice : Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}.dx$ converge ssi $a > 0$, et vaut alors $2/a$.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ converge et vaut $\pi/2$. En effet, $\int_0^{A} \frac{dx}{x^2+1}$ = Arctan A $\to \pi/2$ quand A $\to +\infty$.

En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ converge et vaut π.

3) $\int_0^{+\infty} dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin x.dx$ divergent.

En effet, $\int_0^{A} dx$ = A $\to +\infty$ avec A, et $\int_0^{A} \sin x.dx$ = 1 – cos A est sans limite quand A $\to +\infty$.

4) $\int_{+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ converge ssi $a > 1$.

En effet t $\to \frac{1}{t^a}$ est continue positive sur [1, +∞[. $\int_1^{A} \frac{dt}{t^a}$ = ln A si $a = 1$, $\frac{A^{1-a}-1}{1-a}$ sinon.

Pour $a > 1$, $\int_1^{A} \frac{dt}{t^a}$ tend vers $\frac{1}{a-1}$ quand A $\to +\infty$; sinon, elle tend vers $+\infty$.

5) $\int_0^{1} \frac{dt}{t^a}$ converge ssi $a < 1$.

En effet t $\to \frac{1}{t^a}$ est continue positive sur]0, 1]. $\int_\varepsilon^{1} \frac{dt}{t^a}$ = – ln ε si $a = 1$, $\frac{1-\varepsilon^{1-a}}{1-a}$ sinon.

Pour $a < 1$, $\int_\varepsilon^{1} \frac{dt}{t^a}$ tend vers $\frac{1}{1-a}$ quand ε $\to$ 0+ ; sinon, elle tend vers $+\infty$.

6) Il résulte de 4) et 5) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ est toujours divergente.

7) $\int_0^{1} \ln t.dt$ converge, et vaut –1.

En effet t $\to$ ln t est continue sur]0, 1], et $\int_\varepsilon^{1} \ln t.dt = [t.\ln t - t]_\varepsilon^1$ = –1 – ε.ln ε + ε $\to$ 1 quand ε $\to$ 0+ .

8) $\int_0^{\pi/2} \tan t.dt$ diverge. En effet t $\to$ tan t est continue positive sur [0, π/2[, et :

$\int_0^{x} \tan t.dt$ = – ln(cos x) $\to +\infty$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$. On conclut aisément.

1.3. Critères.

Tant que f se primitive élémentairement et aisément, étudier la nature de $\int_I f(x).dx$ est facile. C'était le cas des exemples précédents. Les choses se compliquent lorsque f ne se primitive pas élémentairement, ou lorsque sa primitive est trop longue à calculer. On aimerait alors disposer de critères simples assurant la convergence ou la divergence de l'intégrale impropre.

La situation est analogue à la théorie des séries : lorsque la somme partielle se calcule élémentairement (séries téléscopiques), on peut étudier directement la série : nature et calcul éventuel. Quand ce n'est pas le cas, on a recours aux fameux critères de convergence.

Dans les énoncés suivants nous nous plaçons sur un intervalle semi-ouvert I = [a, b[. Le cas où I =]a, b] est en tout point analogue, et nous n'énonçons pas les énoncés.

Proposition 1 : **Linéarité.**
Soient f et g deux fonctions continues sur [a, b[, λ et μ deux réels.
Alors $\int_{[a,b[} f(x).dx$ et $\int_{[a,b[} g(x).dx$ convergent $\Rightarrow \int_{[a,b[} (\lambda.f(x)+\mu.g(x)).dx$ converge

Remarque : Il en résulte que

$$\int_{[a,b[} f(x).dx \text{ converge et } \int_{[a,b[} g(x).dx \text{ diverge } \Rightarrow \int_{[a,b[} (f(x)+g(x)).dx \text{ diverge.}$$

En revanche, si $\int_{[a,b[} f(x).dx$ et $\int_{[a,b[} g(x).dx$ divergent, on ne peut rien dire de $\int_{[a,b[} (f(x)+g(x)).dx$.

Proposition 2 : Soient *f* une fonction continue <u>positive</u> sur [a, b[. Pour que l'intégrale $\int_{[a,b[} f(x).dx$ converge, il faut et il suffit que la fonction F(*x*) = $\int_a^x f(t).dt$ soit majorée sur [a, b[.

Proposition 3 : **Critère majoration-minoration**.
Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur [a, b[telles que $\forall x \ \ 0 \le f(x) \le g(x)$.
Alors $\int_{[a,b[} g(x).dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_{[a,b[} f(x).dx$ converge, $\int_{[a,b[} f(x).dx$ diverge $\Rightarrow$ $\int_{[a,b[} g(x).dx$ diverge.

Cet énoncé reste vrai si l'on a $0 \le f(x) \le g(x)$ sur [c, b[.

Corollaire 1 : **Critère de domination**.
Soient *f* et *g* deux fonctions continues positives sur [a, b[telles que $f(x) = O(g(x))$ au V(b-0).
Alors $\int_{[a,b[} g(x).dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_{[a,b[} f(x).dx$ converge.

Corollaire 2 : **Critère de l'équivalent**.
Soient *f* et *g* deux fonctions continues positives sur [a, b[telles que $f(x) \sim g(x)$ au V(b-0).
Alors $\int_{[a,b[} g(x).dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_{[a,b[} f(x).dx$ converge.
Ce résultat subsiste si *f* et *g* sont semblables au V(b-0), i.e. si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) = O(f(x))$.

Remarque : Cela reste vrai si *f* et *g* sont équivalentes et de signe constant au V(b-0), mais pas si elles sont équivalentes et changent sans cesse de signe.

Proposition 4 : **Critère d'absolue convergence**.
Si l'intégrale $\int_{[a,b[} |f(x)|.dx$ converge, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} f(x).dx$ converge.
On dit alors que l'intégrale $\int_{[a,b[} f(x).dx$ est **absolument convergente**, ou que la fonction *f* est **intégrable**.

Remarque : l'absolue convergence implique la convergence, mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.dx$, qui sera vu en exercice. La situation est analogue à la théorie des séries : la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais non absolument.

Corollaire 1 : **Critère de domination**.
Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur [a, b[telles que $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \ge 0$ au V(b-0).
Alors $\int_{[a,b[} g(x).dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_{[a,b[} f(x).dx$ est absolument convergente.

<u>Exemples</u> : les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}.dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}.dx$ sont absolument convergentes.

Corollaire 2 : Si l'intervalle [a, b[est <u>borné</u> et si *f* a une limite finie en b–0, alors $\int_{[a,b[} f(x).dx$ converge. Cela reste vrai si l'intervalle [a, b[est borné et si *f* est bornée sur cet intervalle.
Dans le premier cas, on dit souvent que l'intégrale est « faussement impropre ».

<u>Exemples</u> : $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}.dx$ et $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}.dx$ convergent (ici I =]0, 1]). Voir ci-après.

Ajoutons pour conclure que, dans les énoncés précédents, on peut supposer les fonctions seulement continues par morceaux sur tout segment inclus dans [a, b[.

2. Exercices.

Exercice 1 : Convergence et calcul de $\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ (a et $b > 0$).

Solution :

La fonction $f(x) = \frac{1}{(x+a)(x+b)}$ est continue positive sur $\mathbf{R}_+$, et $O(\frac{1}{x^2})$ au V($+\infty$), ou $\leq \frac{1}{x^2}$, donc intégrable. Pour calculer I(a, b), décomposons la fraction en éléments simples.

On obtient, si $a \neq b$: $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} (\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b})$ (*).

Attention ! Ne pas écrire $\mathrm{I}(a, b) = \frac{1}{b-a} (\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+a} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+b})$, mais

$$\mathrm{I}(a, b) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{b-a} (\int_0^{A} \frac{dx}{x+a} - \int_0^{A} \frac{dx}{x+b}) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{b-a} (\ln(A + a) - \ln a - \ln(A + b) + \ln b)$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{b-a} (\ln \frac{A+a}{A+b} - \ln \frac{a}{b}) = \frac{\ln b - \ln a}{b-a} .$$

Pour calculer la limite, il y a intérêt à solidifier les logarithmes en un seul bloc. Comme la somme des résidus est nulle, la limite en l'infini est nulle. Si $a = b$, on trouve, $\mathrm{I}(a, a) = \frac{1}{a}$.

<u>Conclusion</u> : Pour a et $b > 0$, $\mathrm{I}(a, b) = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$ si $a \neq b$, $\mathrm{I}(a, a) = \frac{1}{a}$.

Exercice : Montrer que la fonction $(a, b) \to \mathrm{I}(a, b)$ est continue sur $\mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^*_+$.

Exercice 2 : Convergence et calcul de $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ et $\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}$.

Solution :

Chacune des fonctions intégrées f et g est continue > 0 et $O(1/x^2)$ au V($+\infty$), donc intégrable.
Pour calculer I et J, décomposons f et g en éléments simples.

Décomposons $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ en éléments simples.

On obtient : $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3}$ (*).

Attention ! Ne pas écrire $\mathrm{I} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+3}$, mais

$$\mathrm{I} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2} \int_0^{A} \frac{dx}{x+1} - \int_0^{A} \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2} \int_0^{A} \frac{dx}{x+3}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2} \ln(A + 1) - \ln(A + 2) + \frac{1}{2} \ln(A + 3) + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \ln \frac{\sqrt{(A+1)(A+3)}}{A+2} + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$$

Pour calculer la limite, il y a intérêt à solidifier les logarithmes en un seul bloc. Comme la somme des résidus est nulle, la limite en l'infini est nulle.

Pour calculer J, élévons (*) au carré. Il vient : $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)(x+3)} .$$

Il reste à intégrer chaque terme…

La situation est analogue au calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}$.

Exercice 3 : Convergence et calcul de I = $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ et J = $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}.dx$.

Solution : L'intégrabilité des fonctions continues positives $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ et $g(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$ ne pose aucun problème : elles sont toutes deux $O(1/x^2)$ au $V(\pm\infty)$.

1ère méthode : on peut les calculer séparément par calcul des primitives.

```
> f:=1/(x^4+1);g:=x^2/(x^4+1);
convert(f,parfrac,x,sqrt(2));convert(g,parfrac,x,sqrt(2));
```

$$f := \frac{1}{x^4+1} \qquad -\frac{1}{4}\frac{-2+x\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{4}(2+x\sqrt{2})}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$g := \frac{x^2}{x^4+1} \qquad \frac{1}{4}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{4}\frac{x\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

```
> Int(1/(x^4+1),x)=int(1/(x^4+1),x);Int(x^2/(x^4+1),x)=int(x^2/(x^4+1),x);
```

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\arctan(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\arctan(x\sqrt{2}-1)$$

$$\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\arctan(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\arctan(x\sqrt{2}-1)$$

```
> Int(1/(x^4+1),x=-infinity..infinity)=int(1/(x^4+1),
x=-infinity..infinity);Int(x^2/(x^4+1),x=-infinity..infinity)
=int(x^2/(x^4+1),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$$

2ème méthode : on peut les calculer simultanément.

Tout d'abord, elles sont égales, car le changement de variable $y = 1/x$ donne :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{+\infty}\frac{y^2.dy}{y^4+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2.dx}{y^4+1} = J.$$

Calculons I + J au moyen du changement de variable $u = x - 1/x$:

$$I + J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}.dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}.dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}.dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+2} = \sqrt{2}\,\text{Arctan}\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \pi\sqrt{2}.$$

Par conséquent $I = J = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

3ème méthode : intégration complexe.

Soit γ le lacet obtenu en parcourant le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle de centre O et de rayon R situé dans le demi-plan Re z > 0, parcouru dans le sens trigonométrique (R > 1).

Calculons de deux façons $A(R) = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}$.

D'une part, A(R) = $\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{x^4+1}$ + $\int_0^{\pi}\frac{i\mathrm{Re}^{i\theta}d\theta}{R^4e^{4i\theta}+1}$ $\to$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ quand R $\to +\infty$

car $\left|\int_0^{\pi}\frac{i\mathrm{Re}^{i\theta}d\theta}{R^4e^{4i\theta}+1}\right| \le \int_0^{\pi}\frac{Rd\theta}{R^4-1} = \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0$ quand R $\to +\infty$.

D'autre part, si $\alpha = \exp(i\pi/4)$, $\frac{1}{z^4+1} = \frac{-1}{4}\left(\frac{\alpha}{z-\alpha} + \frac{i\alpha}{z-i\alpha} + \frac{-\alpha}{z+\alpha} + \frac{-i\alpha}{z+i\alpha}\right)$.

donc : A(R) = $\frac{-1}{4}2i\pi\,(\alpha.\mathrm{I}(\gamma,\alpha) + i\alpha.\mathrm{I}(\gamma, i\alpha) - \alpha.\mathrm{I}(\gamma,-\alpha) - i\alpha.\mathrm{I}(\gamma,-i.\alpha))$.

Ces indices valant respectivement 1, 1, 0 et 0, A(R) = $\frac{-1}{4}2i\pi\,\alpha\,(1+i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

<u>Exercice 5</u> : Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}.dx$ converge et vaut 0.

<u>Solution</u> : **1) <u>Convergence</u>**.

La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur]0, +∞[, négative sur]0, 1], positive sur [1, +∞[.

Au V(0+), $f(x) \sim \ln x$, qui est intégrable.

Au V(+∞), $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^2} = O(\frac{1}{x^{3/2}})$, donc f est également intégrable.

2) <u>Calcul</u>. Bien que f ne se primitive pas élémentairement, on peut calculer $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}.dx$.

Le changement de variable $y = 1/x$ donne I = – I, donc I = 0.

Plus précisément, le même changement de variable donne $\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{\ln x}{1+x^2}.dx = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

<u>Exercice 5</u> : Nature de l'intégrale $\int_{-2}^{+3}\frac{dx}{x}$? Trouver $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+3}\frac{dx}{x}$. Explications ?

<u>Solution</u> : La fonction $1/x$ n'est intégrable ni sur]0, 3], ni sur [–2, 0], par conséquent l'intégrale diverge. Cependant, elle converge en un sens affaibli :

$$\int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+3}\frac{dx}{x} = \ln(\varepsilon) - \ln 2 + \ln 3 - \ln(\varepsilon) = \ln 3 - \ln 2.$$

<u>Variante</u> : par imparité,

$$\int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+3}\frac{dx}{x} = \int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+2}\frac{dx}{x} + \int_{+2}^{+3}\frac{dx}{x} = \int_{+2}^{+3}\frac{dx}{x} = \ln 3 - \ln 2.$$

On dit que $\int_{-2}^{+3}\frac{dx}{x}$ converge en ***valeur principale de Cauchy***, et l'on note v.p.$\int_{-2}^{+3}\frac{dx}{x} = \ln 3 - \ln 2$.

<u>Exercice 6</u> : Convergence et calcul des intégrales $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_a^b\frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ ($a < b$).

<u>Solution</u> :

La fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue positive et non bornée sur]–1, 1[. L'intégrale est donc impropre en +1 et –1. Mais on dispose d'une primitive élémentaire :

$\int_c^d\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\, d - \mathrm{Arcsin}\, c$, donc à la limite $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\,1 - \mathrm{Arcsin}\,{-1} = \pi$.

Le changement de variable t = $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}.u$ ramène aussitôt la seconde intégrale à la première :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi.$$

Exercice 7 : Nature de l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \ln(\cos\frac{1}{x}).dx$?

Solution :

Pour $x > 2\pi$, $\frac{1}{2\pi} < x$, donc $f(x) = \ln(\cos(1/x))$ est définie, continue et négative.

Au V(+∞), $\ln(\cos\frac{1}{x}) = \ln(1 - \frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^4})) = -\frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^4}) \sim -\frac{1}{2x^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}.dx$ converge, $\int_{2\pi}^{+\infty} \ln(\cos\frac{1}{x}).dx$ converge.

Exercice 8 : Existence et calcul des intégrales ($n \in \mathbf{N}$) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt \quad , \quad J_n = \int_0^1 (-\ln u)^n.du \quad , \quad K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad , \quad L_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{ch^n t} .$$

Solution :

1) Cet exercice peut être traité de deux façons légèrement différentes.

1ère approche. Posons, pour tout x, $F_n(x) = \int_0^x t^n.e^{-t}.dt$.

$F_0(x) = 1 - e^{-x} \to 1$ quand $x \to +\infty$, donc I_0 converge et vaut 1.

Une intégration par parties donne $F_n(x) = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x)$. Or $x^n e^{-x} \to 0$ en $+\infty$.

Si $F_{n-1}(x)$ a une limite I_{n-1} en $+\infty$, $F_n(x)$ a aussi une limite, et cette limite vaut $I_n = n.I_{n-1}$.

Ainsi, toutes les intégrales convergent par récurrence, et $I_0 = 1$ et $I_n = n.I_{n-1}$ impliquent $I_n = n!$.

2ème approche. Montrons d'abord que toutes ces intégrales convergent.

En effet, $0 \le t^n e^{-t} \le 1/t^2$ pour t assez grand, car $t^{n+2} e^{-t} \to 0$ en $+\infty$.

Ou bien $0 \le t^n e^{-t} \le e^{-t/2}$ pour t assez grand, car $t^n e^{-t/2} \to 0$ en $+\infty$.

Or les fonctions tests $1/t^2$ et $e^{-t/2}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$.

Dès lors, une ipp donne, pour $n > 0$: $I_n = [-t^n e^{-t}]_0^{+\infty} + n.I_{n-1} = n.I_{n-1}$.

Comme $I_0 = 1$, on conclut par récurrence que $I_n = n\,!$.

2) On peut étudier ces intégrales directement : existence et IPP.

On peut aussi noter que le chgt de variable t = ln u donne $J_n = \int_0^1 (-\ln u)^n.du = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt = n!$

3) $K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ est l'intégrale impropre en ±∞ de $\frac{1}{(x^2+1)^n}$, fonction continue positive.

Par parité, il suffit de se placer en +∞. Or $0 \le \frac{1}{(x^2+1)^n} \sim \frac{1}{x^{2n}}$ qui est intégrable ssi $n > 0$.

Il est clair que $K_1 = \pi$. Une intégration par parties donne $2n\, K_{n+1} = (2n-1)K_n$.

Donc $K_n = \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-5}{2n-4} \dots \frac{1}{2} K_1 = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2}\pi.$

Remarque : Les K_n sont des intégrales de Wallis, car le changement de variable $x = \tan\theta$, ou plutôt $\theta = \text{Arctan}\, x$, donne $K_n = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{2n-2}\theta.d\theta = 2W_{2n-2}$.

4) $L_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{ch^n t}$ est l'intégrale impropre en $\pm\infty$ de $\frac{1}{ch^n t}$, fonction continue positive.

Par parité, il suffit de se placer en $+\infty$. Or $0 \le \frac{1}{ch^n t} \sim \frac{2^n}{e^{nt}}$, fonction intégrable.

L_n existe pour $n \ge 1$. Une intégration par parties $L_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cht.dt}{ch^{n+1}t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(sht)}{ch^{n+1}t} = \dots$

donne $(n+1).L_{n+2} = (n+2).L_n$. Tout revient à calculer L_1 et L_2.

Remarque : La situation est analogue à celle des intégrales de Wallis.
D'ailleurs L_n ***est*** une intégrale de Wallis, si l'on passe par la transformation de Gudermann.
En effet le changement de variable y = Arctan (sh x) donne $L_n = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{n-1} y.dy = 2W_{n-1}$.

Exercice 9 : Nature et calcul de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

Solution :
$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$ n'est pas une intégrale impropre. Pour la calculer, deux méthodes :

1ère méthode : poser $x = \cos(2\theta)$, ou plutôt $2\theta = \text{Arccos}\, x$. Il vient : $I = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2\theta).d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$.
Les règles de Bioche ne s'appliquent pas, mais on peut exploiter la symétrie sin-cos en notant que :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2\theta).d\theta}{\sin(\theta+\pi/4)} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{-\cos(2\varphi)}{\sin\varphi}.d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\sin^2\varphi-1}{\sin\varphi}.d\varphi = \sqrt{2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$= \sqrt{2} - \ln(\tan\frac{\varphi}{2})\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \sqrt{2} + \ln\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1).$$

2ème méthode : Ecrivons $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}.dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{2x}.dx - \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{2x}.dx \dots$
Mais attention, cette idée est fausse, car les deux intégrales divergent.
Ecrivons donc $I = \lim_{\alpha\to0+} \int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}.dx = \lim_{\alpha\to0+} \int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1+x}}{2x}.dx - \int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1-x}}{2x}.dx$.
Calculons séparément ces deux intégrales en posant $y = \sqrt{1\pm x}$:

$$\int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1+x}}{2x}.dx = \int_{\sqrt{1+\alpha}}^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{y^2-1}.dy = y + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\Big|_{\sqrt{1+\alpha}}^{\sqrt{2}},$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1-x}}{2x}.dx = \int_{\sqrt{1-\alpha}}^{0} \frac{y^2}{y^2-1}.dy = y + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\Big|_{\sqrt{1-\alpha}}^{0}.$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}.dx = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{1-\alpha} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\sqrt{1+\alpha}+1} + \sqrt{1-\alpha} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\alpha}-1}{\sqrt{1-\alpha}+1}\right|$$

$$\to \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \text{ car } \ln\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}+1}{\sqrt{1+\alpha}-1}\ \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}+1}\right) \to 0 \text{ quand } \alpha \to 0.$$

Remarque : on peut aussi calculer $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}.dx$ par développement en série entière.

Exercice 10 : Convergence et calcul de I = $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}.dx$ et J = $\int_0^{\pi/2}\cos x.\ln(\tan x).dx$.

Solution : • I est l'intégrale impropre en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $f(x) = \sqrt{\tan x}$ qui est continue positive et équivalente à $\frac{1}{\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$ au V($\frac{\pi}{2}$).

Les changements de variable t = tan x, puis u = $\sqrt{t}$ donnent :

I = $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{t^2+1}.dt = \int_0^{+\infty}\frac{2u^2}{u^4+1}.du = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ si l'on en croit l'exercice 3.

• J est l'intégrale imprope en 0 et $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $f(x)$ = cos x.ln(tan x) qui est continue, positive sur [$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$[, négative sur]0, $\frac{\pi}{4}$].

Au V(0+), $f(x) \sim \ln(\tan x) \sim \ln x$, car $\ln(\tan x) = \ln(x + O(x^3)) = \ln x + \ln(1 + O(x^3)) = \ln x + O(x^2)$.
Or ln x est intégrable sur]0, 1].

Au V($\frac{\pi}{2}$–), $x = \frac{\pi}{2} - h$, donc $f(x) = -\sin h.\ln(\tan h) \sim -h.\ln h$; il y a fausse impropreté.

Pour calculer J = $\int_0^{\pi/2}\cos x.\ln(\tan x).dx$, intégrons par parties.

Mais pour éviter tout problème, cherchons une primitive de f par parties.

$$\int \cos x.\ln(\tan x).dx = \sin x.\ln(\tan x) - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = F(x).$$

$\lim_{x\to 0+} F(x) = 0$ car $\sin x.\ln(\tan x) \to 0$ en 0+ (voir ci-dessus).

En $\frac{\pi}{2}$–, $x = \frac{\pi}{2} - h$, et $F(x) = -\cos h.\ln(\tan h) + \ln(\tan\frac{h}{2})$

$= \cos h.\ln(\cos h) - \cos h.\ln(\sin h) + \ln(\sin\frac{h}{2}) - \ln(\cos\frac{h}{2}) = -\cos h.\ln(\sin h) + \ln(\sin\frac{h}{2}) + o(1)$.

Or $-\cos h.\ln(\sin h) + \ln(\sin\frac{h}{2}) = -\cos h.(\ln h + O(h)) + \ln\frac{h}{2} + O(h) \to -\ln 2$.

Conclusion : $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}.dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, $\int_0^{\pi/2}\cos x.\ln(\tan x).dx = -\ln 2$.

Variante : le changement de variable t = tan x donne I = $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t^2)^{3/2}}.dt$.

Exercice 11 : Nature et calcul des intégrales suivantes :

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}.dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x\sqrt{x^2+1}}$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^3\ln x}{(x^4+1)^3}.dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1).x^{2/3}}$,

$\int_0^1\frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x(1+\sqrt{\frac{x}{1-x}})}.dx$, $\int_0^1\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x(1-x)}}$.

Solution :

1) Le chgt de variable t = $\sqrt{x}$ donne $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}.dx = \int_0^{+\infty}\frac{2t^2.dt}{(t^4+1)^2}$.

Nous voilà ramenés à une fraction rationnelle... Décomposer en éléments simples, passer par la variable complexe, ou faire appel à Maple…

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ est continue positive sur $\mathbf{R}_+$, équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$ au V(+∞), donc intégrable.

On a $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$: poser $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sh t, etc.

3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x\sqrt{x^2+1}}$ est continue positive sur $\mathbf{R}_+$, équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$ au V(+∞), donc intégrable.

Le changement de variable x = sh t donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x\sqrt{x^2+1}} = \int_0^{+\infty}\frac{cht.dt}{1+sht.cht}$.

Fraction rationnelle en ch-sh…

4) $f(x) = \dfrac{x^3 \ln x}{(x^4+1)^3}$ est continue, tend vers 0 en 0+, et est O($\frac{1}{x^8}$) au V(+∞). Elle est donc intégrable.

Le changement de variable u = x^4 donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3\ln x}{(x^4+1)^3}.dx = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{(u+1)^3}.du$.

Intégrons par parties : $\displaystyle\int\frac{\ln u}{(u+1)^3}.du = \frac{-\ln u}{2(u+1)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{-\ln u}{2(u+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{u}{u+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{u+1}$.

Limite en +∞ : 0, limite en 0+ : $\frac{1}{2}$. Au final : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3\ln x}{(x^4+1)^3}.dx = -\frac{1}{32}}$.

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)x^{2/3}}$ est continue positive sur]0, +∞[, intégrable car $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2/3}}$ en 0+, $\sim \dfrac{1}{x^{4/3}}$ en +∞.

5) Le changement de variable u = $x^{1/3}$ donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1).x^{2/3}} = \int_0^{+\infty}\frac{3}{u^3+1}.du$.

$$\frac{3}{u^3+1} = \frac{1}{u+1} + \frac{-u+2}{u^2-u+1} = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{u^2-u+1}.$$

Donc : $\displaystyle\int\frac{3}{u^3+1}.du = \ln\frac{|u+1|}{\sqrt{u^2-u+1}} + \sqrt{3}\,\text{Arctan}\,\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$. Au final :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1).x^{2/3}} = \int_0^{+\infty}\frac{3}{u^3+1}.du = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.}$$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x\left(1+\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)}$ est continue positive sur]0, 1[, $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0+, à 1 en 1 (fausse impropreté).

Les changements de variable $x = \sin^2\theta$, θ = Arcsin$\sqrt{x}$, puis t = tan θ , donnent :

$$\int_0^1\frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x\left(1+\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)}.dx = 2\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+\tan\theta} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} = \ldots = \ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} + \text{Arctan t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Variante</u> : le changement de variable t = $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ donne le même résultat.

7) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x(1-x)}}$ est continue positive sur]0, 1[, équivalente à $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en 0+ et à $\dfrac{1}{3\sqrt{1-x}}$ en 1−, donc intégrable sur]0, 1[. Le changement de variable $2x - 1$ = sin θ (plutôt θ = Arcsin…) donne

$$\text{I} = \int_0^1\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1\frac{2dx}{(x+2)\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{2.d\theta}{5+\sin\theta}\text{ , puis t = tan(θ/2)…}$$

```
> f:=x->1/((x+2)*sqrt(x*(1-x)));int(f(x),x);int(f(x),x=0..1);
```

$$\frac{1}{6}\sqrt{6}\ \arctan\left(\frac{1}{12}\,\frac{(-2+5x)\sqrt{6}}{\sqrt{-(x+2)^2+5x+4}}\right)$$
$$\frac{1}{6}\pi\sqrt{6}$$

Exercice 12 : Existence et calcul des intégrales : $I(a) = \int_0^1 x^a.\ln x.dx$.

Solution : $f(x) = x^a.\ln x$ est continue négative sur]0, 1] .
Si $0 < a$, $f(x) \to 0$ en 0+ ; il y a fausse impropreté.
Si $-1 < a$, $f(x) = O(\frac{1}{x^{\frac{1-a}{2}}})$ au V(0+), car $x^{\frac{a+1}{2}}\ln x \to 0$. Or $\frac{1}{x^{\frac{1-a}{2}}}$ est intégrable sur]0, 1].

Si $a = -1$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est non intégrable, car $\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}.dx = -\frac{\ln^2\varepsilon}{2} \to -\infty$. A fortiori si $a < -1$.
Conclusion : $I(a)$ est définie pour $a > -1$. Une intégration par parties donne alors $I(a) = -\frac{1}{(a+1)^2}$.

NB : le chgt de variable $x = e^{-t}$ donne $I(a) = \int_0^{+\infty} te^{-(a+1)t}.dt$, fournissant un autre angle d'attaque.

Exercice 13 : Existence et calcul de $I = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t).dt$ (On pourra noter que $I = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos t).dt$).

Solution :
La fonction $f : t \to \ln(\sin t)$ est continue négative sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
Au V(0+), $f(t) = \ln(t + O(t^3)) = \ln t + O(t^2) \sim \ln t$, donc f est intégrable.
Pour calculer I, notons que :
$$I = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t).dt = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos t).dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t.\cos t).dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\frac{\sin(2t)}{2}.dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t).dt - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin u).du - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u).du - \frac{\pi}{4}\ln 2$$
$$= \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln 2 \text{ , par pliage, donc } \boxed{I = -\frac{\pi}{2}\ln 2} .$$
Remarque : d'autres méthodes existent, moins astucieuses.

Exercice 14 : Nature de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.dx$.

Solution : La fonction $x \to e^{-x^2}$ est continue positive, mais ne se primitive pas élémentairement.

On ne peut donc montrer la convergence de l'intégrale en calculant $\int_0^A e^{-x^2}.dx$. Nous allons procéder par comparaison à des fonctions tests connues.
1ère méthode : je dis que, pour x assez grand, $x \ge a > 0$, $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$, car $x^2e^{-x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Comme $\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, e^{-x^2} itou.

2ème méthode : je dis que, pour tout x, $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2+1}$, car $1 + x^2 \le e^{x^2}$ (au fait, pourquoi ?).

Comme $\frac{1}{x^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, e^{-x^2} itou.

3ème méthode : je dis que, pour $x \geq 1$, $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Comme e^{-x} est intégrable sur $[1, +\infty[$, e^{-x^2} itou.

Remarque : On peut néanmoins calculer par divers moyens indirects l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.dx$, et démontrer qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. La méthode la plus classique consiste à considérer l'intégrale double $\iint_{[0,+\infty[^2} e^{-x^2-y^2}.dxdy$ et à la calculer de deux façons. Mais on peut aussi passer par la variable complexe.

Exercice 15 : Nature de l'intégrale $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x}).dx$.

Solution : La fonction $x \to \sin(1/x)$ est définie sur **R***, et n'a pas de limite en 0, car elle oscille au V(0). L'intégrale proposée est impropre en 0.

Faute de pouvoir calculer $\int_\varepsilon^1 \sin(\frac{1}{x}).dx$, on va montrer l'absolue convergence par comparaison.

Le plus simple est de noter que $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$. Comme la fonction $x \to 1$ est intégrable sur $]0, 1]$, la fonction $x \to \sin(1/x)$ l'est également.

On peut aussi noter que le changement $y = 1/x$ transforme l'intégrale en $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2}.dy$, qui est clairement absolument convergente.

Remarques : 1) On peut montrer qu'une fois prolongée arbitrairement en 0, la fonction $x \to \sin(1/x)$ n'est pas réglée, mais est Riemann-intégrable sur [0, 1].

2) Maple affirme que $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x}).dx = \sin 1 - \mathrm{Ci}(1) \approx 0.504$. Encore faut-il connaître la fonction « Cosinus intégral » Ci…

```
> A:=int(sin(1/x),x=0..1);evalf(A);
```

$$A := \sin(1) - \mathrm{Ci}(1)$$

$$.5040670619$$

3) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{x}.dx$ diverge car $0 < \sin(1/x) \sim 1/x$ au V(+∞).

Exercice 16 : Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1-\cos\frac{1}{x}).dx$.

Solution : La fonction $x \to 1 - \cos(1/x)$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.
Elle est bornée sur $]0, 1]$, et $O(1/x^2)$ au V(+∞), donc intégrable sur $[1, \infty[$.
En résumé, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Remarques : 1) Le changement de variable $y = 1/x$ transforme l'intégale en $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos y}{y^2}.dy$, qui est faussement impropre en 0 et convergente sur $[1, +\infty[$, car $0 \leq \frac{1-\cos y}{y^2} \leq \frac{2}{y^2}$.

2) Maple affirme que :

```
> B:=int(1-cos(1/x),x=0..infinity);evalf(B);
```

$$B := \frac{1}{2}\pi$$

$$1.570796327$$

Exercice 17 : Nature de l'intégrale $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}.\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}.dx$.

Solution : C'est l'intégrale impropre en 0+ et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$.

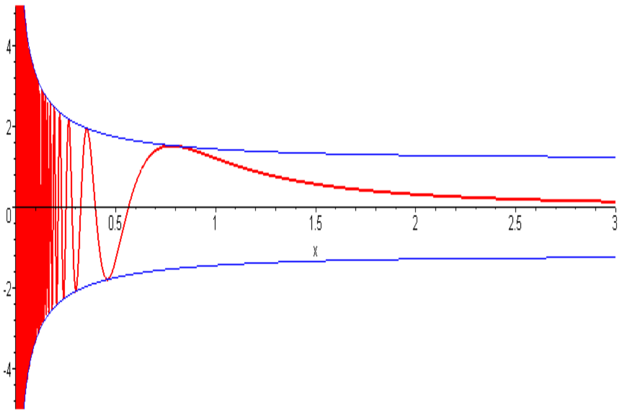
Etudions séparément son intégrabilité au V(+∞) et au V(0+).

• Au V(+∞), $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}.\ln x} \le \frac{1}{x^{3/2}}$; par conséquent, f est intégrable.

• Au V(0+), $|\,f(x)\,| \le \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$; par conséquent, f est intégrable.

En fait, au V(0+), la fonction $f(x)$ oscille entre $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ et $-\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$.

```
> with(plots):f:=x->sqrt(x)*sin(1/x^2)/ln(1+x);g:=x->sqrt(x)/ln(1+x);
> p:=plot(f(x),x=0..3,-4..4,thickness=2,numpoints=1000):
q:=plot([g(x),-g(x)],x=0..3,-5..5,color=blue):display({p,q});
```



Exercice 18 : Discuter la nature des intégrales de Bertrand : $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(\ln x)^b}$ et $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^a|\ln x|^b}$.

Solution : La première de ces intégrales est au programme sans être au programme, tout en l'étant…

• Notons F(a, b) la première intégrale. Elle converge ssi $a > 1$, ou ($a = 1$ et $b > 1$), autrement dit ssi (a, b) > (1, 1) pour l'ordre lexicographique.

C'est l'intégrale impropre en +∞ de la fonction continue et positive $x \to \frac{1}{x^a.(\ln x)^b}$.

Le plus simple est de commencer par le cas $a = 1$. Le changement de variable u = ln x donne :

$\int_2^A \frac{dx}{x.(\ln x)^b} = \int_{\ln(2)}^{\ln(A)} \frac{du}{u^b}$. On sait que cette intégrale converge ssi $b > 1$.

Si $a > 1$, je dis que $0 < \frac{1}{x^a.(\ln x)^b} < \frac{1}{x.(\ln x)^2}$ pour x assez grand, car $x^{a-1}(\ln x)^{b-2} \to +\infty$ en +∞.

Comme $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.(\ln x)^2}$ converge, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(\ln x)^b}$ converge.

Si $a < 1$, je dis que $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^a.(\ln x)^b}$ pour x assez grand, car $x^{a-1}(\ln x)^b \to 0$ en +∞.

Comme $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(\ln x)^b}$ diverge.

• Soit G(a, b) la seconde intégrale. Elle converge ssi $a < 1$ ou $a = 1$ et $b > 1$.

Le changement de variable u = 1/x donne en effet : $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^a |\ln x|^b} = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-a}.\ln^b u}$.

Nous voilà ramenés aux intégrales précédentes. Mais on pouvait aussi rester au V(0+).

<u>Remarque</u> : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a |\ln x|^b}$ est toujours divergente. Elle est impropre en 0+, 1 et +∞.

En effet, en vertu de ce qui précède, il y a convergence sur]0, ½] et [2, +∞[ssi $a = 1$ et $b > 1$.
Mais au V(1), $\frac{1}{x^a |\ln x|^b} \sim \frac{1}{|x-1|^b}$. Il y a convergence sur [½, 2] ssi $b < 1$.

<u>Exercice 19</u> : Discuter la nature de l'intégrale : $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^a.(\ln t)^b.(\ln\ln t)^c}$.

<u>Solution</u> :

• Soit F(a, b, c) la première intégrale. Elle converge ssi $a > 1$, ou $a = 1$ et $b > 1$, ou $a = b = 1$ et $c > 1$, autrement dit ssi $(a, b, c) > (1, 1, 1)$ pour l'ordre lexicographique.
Le plus simple est d'étudier le cas $a = b = 1$. Le chgt de variable u = ln ln t donne

$$\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t.\ln t.(\ln\ln t)^c} = \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{du}{u^c}.$$ L'intégrale converge ssi $c > 1$.

Si $a > 1$, ou $a = 1$ et $b > 1$, alors $f_{a,b,c}(t) \leq f_{1,1,2}(t)$ au V(+∞).

Si $a < 1$, ou $a = 1$ et $b < 1$, alors $f_{a,b,c}(t) \geq f_{1,1,1}(t)$ au V(+∞).

• Soit G(a, b) la seconde intégrale. Elle converge ssi $a < 1$ ou $a = 1$ et $b > 1$.

Le changement de variable u = 1/t donne en effet : $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^a |\ln t|^b} = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-a}.\ln^b u}$.

Nous voilà ramenés à des Bertrand classiques. Mais on peut aussi rester au V(0+).

<u>Exercice 20</u> : Discuter la nature des intégrales : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(1+x^b)}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(1+x^b)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^a)}{t^b}.dt$.

<u>Solution</u> :

1) La fonction $f(x) = \frac{1}{x^a(1+x^b)}$ est continue et positive sur [1, +∞[.

En +∞, $f(x) \sim \frac{1}{x^{a+b}}$ si $b > 0$; il y a intégrabilité ssi $a + b > 1$.

$f(x) \sim \frac{1}{2x^a}$ si $b = 0$ et $f(x) \sim \frac{1}{x^a}$ si $b < 0$; il y a intégrabilité ssi $a > 1$.

$I(a, b) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(1+x^b)}$ est définie sur D = { (a, b) ; $b > 0$ et $a + b > 1$ } ∪ { (a, b) ; $b \leq 0$ et $a > 1$ } .

2) En 0+, $f(x) \sim \frac{1}{x^a}$ si $b > 0$ et $f(x) \sim \frac{1}{2x^a}$ si $b = 0$; il y a intégrabilité ssi $a < 1$.

$f(x) \sim \frac{1}{x^{a+b}}$ si $b < 0$; il y a intégrabilité ssi $a + b < 1$.

$J(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a.(1+x^b)}$ est définie sur D ∩ D', avec :

D' = { (a, b) ; $b \geq 0$ et $a < 1$ } ∪ { (a, b) ; $b < 0$ et $a + b < 1$ } .

Exercice 21 : Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.dt$.

Discuter selon la valeur du réel x la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}.dt$.

Solution : 1) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

La fonction $f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.

$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.dt$ converge car $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ au V(0+), $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.dt$ converge car alors $0 \le f(t) \le e^{-t}$.

2) La fonction $f_x(t) = e^{-t}.t^{x-1}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.
Pour tout x, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $0 \le f_x(t) \le e^{-t/2}$ ou $1/t^2$ pour t assez grand.
Au voisinage de 0+ , $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, donc f_x est intégrable ssi $1 - x < 1$, i.e. $x > 0$.

En résumé, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}.dt$ converge ssi $x > 0$. C'est la fameuse fonction Gamma.

Exercice 22 : Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.dt$.

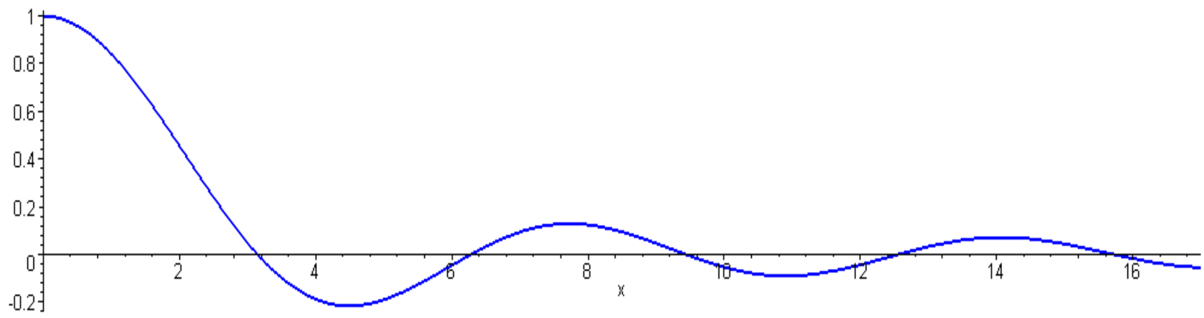
Solution : Traitons en grand détail cet exemple important d'intégrale « semi-convergente », c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente.
Notons d'abord que $\frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0, et même développable en série entière sur **R**. L'intégrale est donc faussement impropre en 0. Néanmoins, il y a un léger problème en 0.
La méthode la plus simple pour résoudre le problème est d'intégrer par parties :

$$F(x) = \int_\pi^x \frac{\sin t}{t}.dt = \int_\pi^x \frac{d(-\cos t)}{t} = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}.dt = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos x}{x} - G(x) ,$$

où $G(x) = \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}.dt$. Or $\frac{\cos x}{x}$ tend vers 0 et $\frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$, de sorte que $G(x)$ converge. $F(x)$ aussi.

De plus : $F^*(x) = \int_\pi^x \left|\frac{\sin t}{t}\right|.dt \ge \int_\pi^x \frac{\sin^2 t}{t}.dt = \int_\pi^x \frac{1-\cos(2t)}{2t}.dt = \frac{\ln x - \ln \pi}{2} - \int_\pi^x \frac{\cos(2t)}{2t}.dt$.

Or $\ln x$ tend vers $+\infty$, tandis que $H(x) = \int_\pi^x \frac{\cos(2t)}{2t}.dt$ converge *pour la même raison* que $F(x)$. De sorte que $F^*(x)$ tend vers $+\infty$, et $\frac{\sin t}{t}$ est non intégrable.



Exercice 23 : Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.dt$.

1) a) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ est, une fois prolongée, de classe C^1 sur $]-\pi, +\pi[$.

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(x).\sin(nx).dx = 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin x}.dx$.

Trouver une relation entre J_n et J_{n-2} ($n \geq 2$). En déduire J_n .

3) Déduire de ce qui précède la valeur de I et $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}.dt$.

Solution :

La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est semi-intégrable, et non intégrable, sur $\mathbf{R}_+$: voir exo précédent.

1.a) La fonction $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ est, une fois prolongée, de classe C^1 sur $]-\pi, +\pi[$.

Tout d'abord, elle est C^∞ sur $]-\pi, 0[\cup]0, +\pi[$.
Le fait qu'elle soit de classe C^1 sur $]-\pi, +\pi[$ peut se montrer de deux façons.
1ère méthode : élémentaire. Elle consiste à faire un développement limité de f et de f' en 0.

Il vient $f(x) = -\frac{x}{6} + O(x^2)$, ce qui montre que $f(x) \to 0$ et $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

Puis $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{6} + O(x)$, ce qui montre que $f'(x) \to f'(0) = -\frac{1}{6}$ quand $x \to 0$.

2ème méthode : f est développable en série entière au V(0), donc C^∞ en 0.

En effet, $f(x) = \frac{\sin x - x}{x.\sin x}$. Après simplification par x^2, on trouve $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, où a et b sont sommes de séries entières de rayon infini, et $b(0) = 1$. Le théorème de division des séries entières s'applique et montre que f est DSE(0).

b) Conséquence : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(x).\sin(nx).dx = 0$.

On reconnaît le lemme de Riemann-Lebesgue. Il repose sur la continuité de f en 0. Mais ici, on peut l'établir élémentairement, par intégration par parties et majoration en valeur absolue :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f(x).d\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right) = -\left.\frac{f(x).\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nx)}{n}.f'(x).dx = O\left(\frac{1}{n}\right) .$$

2) Soit $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin x}.dx$. Pour $n \geq 2$, il vient :

$$J_n - J_{n-2} = \int_0^{\pi/2} \frac{2.\cos((n-1)x).\sin x}{\sin x}.dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos((n-1)x).dx = \frac{2}{n-1} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) .$$

$J_n - J_{n-2} = 0$ si n est impair : la suite (J_{2k+1}) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

$J_n - J_{n-2} = 2\,\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ si $n = 2k$. Donc $J_{2k} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right)$.

3) Conclusion. Ecrivons

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{x}.dx - \int_0^{\pi/2} f(x).\sin(nx).dx = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin t}{t}.dt - \int_0^{\pi/2} f(x).\sin(nx).dx .$$

On déduit de c) que (J_n) tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.dt$.

Faisons tendre n vers l'infini par valeurs impaires. Il vient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, l'intégrale J = $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}.dt$ se calcule par parties :

$$J = \int_0^{+\infty} \sin^2 t.d(-\frac{1}{t}) = \int_0^{+\infty} 2\sin t.\cos t.\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}.dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Exercice 24</u> : Discuter la nature des intégrales $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}.dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}.dt$.

<u>Solution</u> : $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}.dt$ est • absolument convergente pour $a > 1$,

• semi-convergente pour $0 < a \le 1$, • divergente pour $a \le 0$.

Le 1er point est évident. Le 2ème s'établit par intégration par parties.

Le 3ème s'établit en montrant que les tranches de Cauchy $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^a}.dt$ ne tendent pas vers 0.

$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^a}.dt$ converge ssi $a < 2$ (règle de l'équivalent). Au final, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}.dt$ converge ssi $0 < a < 2$.

<u>Exercice 25</u> : **Intégrales de Fresnel**, ou **intégrales de la diffraction** (1818) :

Il s'agit des trois intégrales : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2).dt$, $\int_0^{+\infty} \cos(t^2).dt$ et $\int_0^{+\infty} \exp(it^2).dt$.

1) Tracez les graphes des fonctions $\sin t^2$ et $\cos t^2$.

2) Montrer la semi-convergence de ces intégrales par changement de variable.

3) Montrer la semi-convergence de ces intégrales par une technique de transformation en série ; montrer qu'elles sont > 0.

Remarque : On peut démontrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2).dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2).dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

<u>Exercice 26</u> : Comparer les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.dt$ et $\int_1^{+\infty} [\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}].dt$.

<u>Solution</u> : Les fonctions $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ et $g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$

sont équivalentes en +∞. Cependant, f est semi-intégrable, g ne l'est pas, car elle est somme de deux fonctions semi-intégrables (par I.P.P.) et d'une fonction (celle du milieu) dont l'intégrale diverge. Cela montre que la règle de l'équivalent ne s'applique pas pour les fonctions semi-intégrables.

Ce contre-exemple est à rapprocher des deux séries : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}.n+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$.

<u>Exercice 27</u> : a) Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2.\sin^2 x}$.

b) Soient a et $b > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^a.dx}{1+x^b.\sin^2 x}$ converge ssi $b > 2a + 2$.

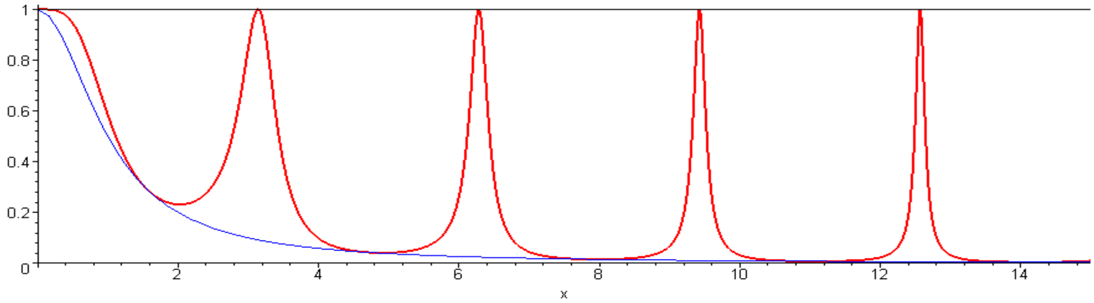
<u>Solution</u> :

1) <u>Analyse</u>. La fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2.\sin^2 x}$ est continue positive sur $\mathbf{R}_+$.

L'encadrement $\frac{1}{1+x^2} \le f(x) \le 1$ ne conclut pas.

Le graphe de f oscille de l'une à l'autre fonction, donc f n'a pas d'équivalent simple en $+\infty$.

```
> with(plots):f:=x->1/(1+x^2*sin(x)^2):
p:=plot(f(x),x=0..15,thickness=2,numpoints=2500):
q:=plot(1,x=0..15,color=black):r:=plot(1/(1+x^2),x=0..15,color=blue):
display({p,q,r});
```



2) <u>Transformons l'intégrale en série</u> : on sait en effet que f intégrable si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x).dx = \int_0^{\pi} \frac{du}{1+(u+n\pi)^2\sin^2 u}$ ($x = n\pi + u$).

Encadrons u_n : $\int_0^{\pi} \frac{du}{1+(n+1)^2\pi^2\sin^2 u} \le u_n \le \int_0^{\pi} \frac{du}{1+n^2\pi^2\sin^2 u}$.

$a_n = \int_0^{\pi} \frac{du}{1+n^2\pi^2\sin^2 u} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+n^2\pi^2\sin^2 u}$ se calcule aisément, la règle de Bioche autorisant t = tan u.

$$a_n = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)[1+\frac{n^2\pi^2 t^2}{1+t^2}]} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(1+n^2\pi^2).t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^2\pi^2}} \sim \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, $u_n \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2\sin^2 x}$ divergent.

<u>Variante</u> : évitons le calcul exact de a_n en utilisant l'encadrement $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\frac{2u}{\pi} \le \sin u \le u$.

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+(n+1)^2\pi^2 u^2} \le a_n = 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+n^2\pi^2\sin^2 u} \le 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+4n^2u^2}.$$

Un calcul montre que (a_n) est *semblable* à $\frac{1}{n}$. Résultat plus faible, mais qui suffit à conclure.

3) <u>Généralisation</u> laissée au lecteur.

<u>Problème 28</u> : <u>intégrale de fractions rationnelles</u>.

1) Soit $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbf{C}(X)$ une fraction rationnelle sous forme réduite.

F est intégrable sur **R** si et seulement si F n'a pas de pôle réel, et deg Q ≥ deg P + 2.

Et alors : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}.dx = 2i\pi.\sum_{a\in\Pi+} \mathrm{Res}_a(F) = -2i\pi.\sum_{a\in\Pi-} \mathrm{Res}_a(F).$$

où Π (resp. Π_+, Π_-) est l'ensemble des pôles de F (resp. dans Im z > 0, dans Im z < 0) et $\mathrm{Res}_a(F)$ est le résidu de F en a (c'est-à-dire le coef. de $\frac{1}{z-a}$ dans la décomposition en éléments simples de F).

2) <u>Applications</u> :

i) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

ii) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n.\sin(\pi/n)}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{x^{2n}+1}.dx = \frac{\pi}{n.\sin(\frac{2p+1}{2n}\pi)}$ ($p < n$).

iii) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ et $F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2.(x^2-2x\cos a+1)}$.