

Feuille 1 de TD. Intégrales généralisées (impropres)

1. En utilisant la définition, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \ln x \, dx, \int_0^{\infty} e^{-4x} \, dx, \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx.$$

2. Quelle est la nature (convergentes, divergentes, n'existe pas) des intégrales suivantes ?

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx, \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \, dx, \int_1^{\infty} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}} \, dx, \int_0^{\pi} \ln(\sin x) \, dx, \int_2^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \, dx,$$

$$\int_0^2 \ln x \, dx, \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx, \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx, \int_{2/\pi}^{\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \, dx, \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx, \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx, \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-x} \, dx.$$

3. **Intégrales de Bertrand.** Étudier la nature de $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} \, dx$ et de $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^a |\ln|^b x} \, dx$.

4. **Aire signée et intégrale.** a) Montrer la convergence des intégrales suivantes : $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$,
 $\int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx$.

b) Montrer que l'aire signée déterminée par les graphes des fonctions $\frac{\sin x}{x}$ et $\sin x^2$, $0 < x < \infty$, n'a pas de sens.