

Feuille 3 de TD. Produit de convolution

1. (Propriétés générales du produit de convolution).

1. Montrer que le produit de convolution est commutatif.
2. Montrer que si f, g sont bornées et *causales* (c'est-à-dire elles s'annulent pour $t \leq 0$), alors $f * g$ est bien défini.
3. Montrer que si f est bornée et s'annule en dehors d'un intervalle borné, et si g est intégrable sur tout intervalle borné, alors $f * g$ est bien défini.
4. Étudier la parité de $f * g$ en fonction de celle de f et de celle de g .
5. Donner des hypothèses naturelles sur f et g de sorte que $(f * g)' = f' * g$.
6. On pose $\tau_a f(x) := f(x - a)$. Montrer que $\tau_a(f * g) = (\tau_a f) * g$.

2. (Calculs explicites de produits de convolution). On considère les fonctions suivantes :

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{fonction de Heaviside})$$

et

$$P_{2a}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{fonction porte de paramètre } a > 0).$$

Calculer les fonctions suivantes (avec $a > 0, b > 0$) :

$$\sin * P_{2a}, \cos * P_{2a}, P_{2a} * P_{2b}, (H(x)e^{-ax}) * (H(x)e^{-bx}), (P_{2a}(x-a)) * (H(x)e^{-bx}), (P_{2a}(x-a)) * e^{-bx}.$$