Feuille 4 de TD. Transformation de Fourier

1. (Calculs élémentaires). Calculer, en fonction de $\widehat{f}$, les transformée de Fourier des fonctions suivantes : $\overline{f(x)}$, $f(-x)$, $f(x-a)$, $f(ax)$, $a>0$, $e^{\imath a x} f(x)$.

2. (Transformée de Fourier d'une gaussienne). On se donne $a>0$. Calculer la transformée de Fourier de $e^{-a x^2}$.

3. (Formule d'inversion de Fourier). On fait les hypothèses suivantes sur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:
— f continue ;
— f bornée ;
— f intégrable ;
— $\widehat{f}$ intégrable.
On se propose de démontrer la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x \xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Établir (par un calcul formel) l'identité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x)\, dx, \ \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}). \tag{2}$$

2. Calculer $\widehat{g}$ pour $g(x) := e^{-\varepsilon^2 x^2}$ ($\varepsilon > 0$ paramètre).
3. Appliquer (2) avec g comme dans la question précédente.
4. Faire $\varepsilon \to 0$ et obtenir (1) avec $x=0$.
5. Obtenir (1) pour toutes les valeurs de x.

4. (Calculs explicites de transformées de Fourier.) Calculer les transformées de Fourier de

1. $e^{-|x|}$.
2. $\dfrac{1}{x^2+1}$.
3. $f(x) = \begin{cases} (1-|x|/a), & \text{si } |x| \le a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

5. Soit $f(x) := \dfrac{1}{x+\imath}$.
   (a) Montrer que $f \not\in L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$.
   (c) Exprimer f en fonction de $\dfrac{1}{x^2+1}$.
   (d) À partir du lien entre les deux fonctions, deviner l'expression de $\widehat{f}$.
   (e) Utiliser le théorème de Plancherel pour justifier la formule obtenue.
6. Même type de questions pour $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

5. (Principe d'incertitude – ou plutôt théorème d'indétermination – de Heisenberg). On se donne une fonction d'onde, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = 1.$

Alors l'écart type de la position d'une particule de densité de répartition f et de position moyenne $\overline{x}$ est $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2\, |f(x)|^2\, dx$.

Par ailleurs, (à une constante dépendant de la particule près) l'écart type de son impulsion est $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi - \overline{\xi}\right)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi$, avec $\overline{\xi}$ son impulsion moyenne.

Le principe de Heisenberg affirme que ces deux quantités ne peuvent pas être petites en même temps.

1. Montrer que
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq 2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{Re}\left(\overline{f}(x) f'(x)\right) dx\right)^2.$$

2. En déduire que
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq \frac{\pi}{2}.$$

3. En déduire que
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2\, |f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi - \overline{\xi}\right)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq \frac{\pi}{2}.$$