Analyse T4, TD n° 4 / Vendredi 7 octobre 2016

Convolution, transformée de Fourier

1. **Produit de convolution.**
2. **Propriétés de la convolution.**
3. **Transformation de Fourier.**
4. **Transformation de Fourier inverse.**
5. **Exercices corrigés.**
6. **Avec Maple.**

Pierre-Jean Hormière

---

1. Produit de convolution.

Soient f et g deux fonctions définies sur **R**, à valeurs réelles ou complexes. On nomme **convolée** de f et g, et l'on note $f * g$, la fonction définie sur **R** par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t).dt\,.$$

Cette définition est incomplète : des hypothèses sur f et g sont nécessaires pour assurer l'existence et la convergence, pour tout x, de l'intégrale à paramètre ci-dessus.

Certains espaces fonctionnels E sont stables pour la convolution ; celle-ci induit dans E une loi de composition interne bilinéaire, commutative, associative. Dans d'autres cas, $f * g$ est définie pour $(f, g) \in$ E×F, où E et F sont des espaces fonctionnels différents ; elle est alors seulement bilinéaire.

Commençons par des exemples.

Exemple 1 : fonctions-portes P_{ab} ($a < b$).

On nomme ainsi la fonction en escaliers positive d'intégrale 1 définie par :

$$\mathrm{P}_{ab}(x) = \frac{1}{b-a} \text{ pour } a \le x \le b \;,\; \mathrm{P}_{ab}(x) = 0 \text{ pour } x \notin [a, b].$$

Soit f une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ou **C** continue par morceaux sur tout segment. Alors $f * \mathrm{P}_{ab}$ est bien définie sur **R**, et :

$$(f * \mathrm{P}_{ab})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)P_{ab}(t).dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x-t).dt = \frac{1}{b-a}\int_{x-b}^{x-a} f(u).du\,.$$

La convolée $f * \mathrm{P}_{ab}$ associe à tout x la valeur moyenne de f sur le segment $[x - b, x - a]$. C'est une moyenne glissante. Notons que :

i) $f * \mathrm{P}_{ab}$ est continue.

ii) Si f est continue, $f * \mathrm{P}_{ab}$ est C^1 et $(f * \mathrm{P}_{ab})'(x) = \dfrac{f(x-a)-f(x-b)}{b-a}$

iii) Si f est C^k, $f * \mathrm{P}_{ab}$ est C^{k+1} et $(f * \mathrm{P}_{ab})^{(k+1)}(x) = \dfrac{f^{(k)}(x-a)-f^{(k)}(x-b)}{b-a}$

iv) Si $b \to a+$, $(f * \mathrm{P}_{ab})(x) \to f(x - a)$.

<u>Cas particuliers</u> : Pour $h > 0$

$$(f * \mathrm{P}_{0,h})(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(u).du \;,\; (f * \mathrm{P}_{-h,0})(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(u).du \;,\; (f * \mathrm{P}_{-h,h})(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(u).du\,.$$

Calculons la convolée de deux fonctions portes :

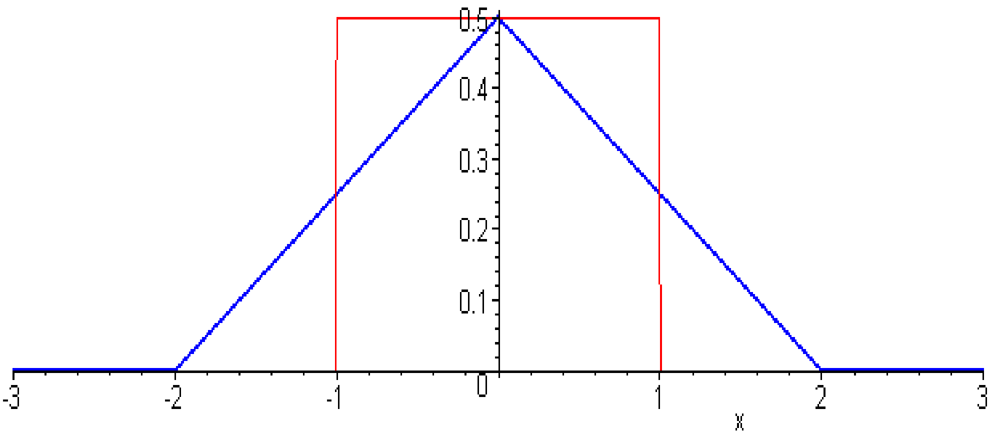
$$(P_{ab} * P_{cd})(x) = \frac{1}{d-c}\int_{x-d}^{x-c} P_{ab}(u).du \;=\; \frac{1}{(d-c)(b-a)}\,\text{long}(\,[x-c,\, x-d] \cap [a, b]\,).$$

Si $d - c \le b - a$, on trouve :

$$(P_{ab} * P_{cd})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-c \le a \text{ , i.e. } x \le a+c. \\ \dfrac{x-c-a}{(d-c)(b-a)} & \text{si } x-d \le a \le x-c \text{ , i.e. } a+c \le x \le a+d. \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x-d \le x-c \le b, \text{ i.e. } a+d \le x \le b+c. \\ \dfrac{b+d-x}{(d-c)(b-a)} & \text{si } x-d \le b \le x-c \text{ , i.e. } b+c \le x \le b+d. \\ 0 & \text{si } x-d \ge b \text{ , i.e. } x \ge b+d. \end{cases}$$

C'est une fonction continue, affine par morceaux, à support fini.
En particulier, pour $a > 0$:

$$(P_{-a,a} * P_{-a.a})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -2a \\ \dfrac{1}{4a^2}(\,2a-|x|\,) & \text{si } |x| \le 2a \\ 0 & \text{si } x \ge 2a. \end{cases}$$ On trouve une fonction-chapeau Ch_a.



<u>Exemple 1</u> : <u>graphes de</u> $P_{-1,1}$ <u>et</u> $P_{-1,1} * P_{-1,1}$.

Il résulte de ce qui précède, par linéarité, que si f et g sont des fonctions en escaliers à support borné, c'est-à-dire nulles en dehors d'un segment de **R**, $f * g$ est continue affine par morceaux et à support borné.

<u>Exemple 2 : gaussiennes</u>.

Notons g_a ($a > 0$) la gaussienne $g_a(x) = e^{-ax^2}$.

Je dis que la convolée de deux gaussiennes est encore une gaussienne :

$$g_a * g_b \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, g_{ab/(a+b)} \,.$$

En effet, $\quad (g_a * g_b)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-t)^2} e^{-bt^2}.dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+b)t^2+2axt-ax^2}.dt$.

On peut alors conclure à l'aide du :

<u>Lemme</u> : Si $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{at^2+bt+c}{2}}.dt \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\exp\,\frac{b^2-4ac}{8a}$.

Ce lemme suppose connue l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.dt \;=\; \sqrt{\pi}$, et se montre par mise du trinôme sous forme canonique et changement de variable.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{at^2+bt+c}{2}}.dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}(t+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{8a}}.dt = \exp\frac{b^2-4ac}{8a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}(t+\frac{b}{2a})^2}.dt = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\exp\frac{b^2-4ac}{8a}$$

(poser u = $t + \frac{b}{2a}$, puis s = $u\sqrt{\frac{a}{2}}$).

Notons G_{m,σ^2} ($\sigma > 0$) la fonction $G_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

C'est une fonction continue, positive, intégrable, d'intégrale 1, et vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xG_{m,\sigma^2}(x).dx = m \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2.G_{m,\sigma^2}(x).dx = \sigma^2 .$$

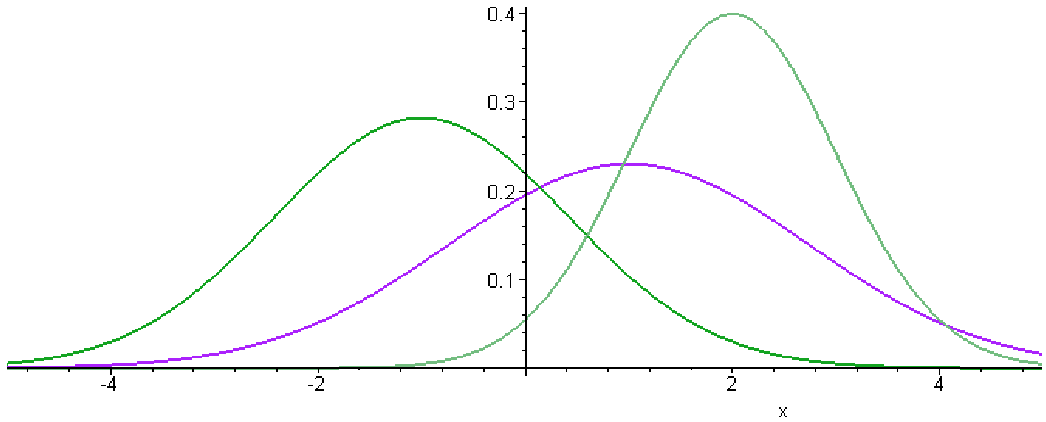
Je dis que $\qquad G_{m,\sigma^2} * G_{m,\sigma^2} = G_{m+m',\sigma^2+\sigma'^2}$.

Il s'agit de vérifier que :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t-m)^2}{2\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-m')^2}{2\sigma'^2}}.dt = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m-m')^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}} .$$

Cela découle du lemme précédent, ou du fait que $G_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, g_{\frac{1}{2\sigma^2}}(x-m)$.

```
> with(plots):
> p:=(m,s)->plot(1/sqrt(2*s*Pi)*exp(-(x-m)^2/(2*s)),x=-5..5,thickness=2,
color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12, rand()/10^12));
> display({p(-1,2),p(2,1),p(1,3)});
```



<u>Graphes de</u> $G_{-1,2}$, $G_{2,1}$ <u>et</u> $G_{1,3} = G_{-1,2} * G_{2,1}$

Ce résultat a une conséquence importante en théorie des probabilités : si deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent les lois normales $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ respectivement, leur somme X + Y suit la loi normale $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

<u>Exemple 3 : fonctions nulles sur]−∞, 0[</u>.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $\mathbf{R}$, nulles sur $]-\infty, 0[$.

Alors $f(x-t).g(t) = 0$ pour $t \notin [0, x]$; si $x < 0$, $f(x-t).g(t) = 0$ pour tout t.

Du coup, pour tout x, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t).dt$ converge.

$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t).dt$ pour tout $x \geq 0$. $(f * g)(x) = 0$ pour tout $x < 0$

<u>Exercice</u> : Pour $(n, \lambda) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{R}$, soit $f_{n,\lambda}$ définie par $f_{n,\lambda}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.e^{\lambda x}$ si $x > 0$, 0 si $x < 0$.

Vérifier que $\forall (n, p) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \quad \forall\lambda \in \mathbf{R} \quad f_{n,\lambda} * f_{p,\lambda} = f_{n+p,\lambda}$.

2. Propriétés de la convolution.

2.1. Fonctions c.p.m. à support borné.

Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite **à support borné** s'il existe un segment [a, b], dépendant de f, tel que : $x \notin [a, b] \Rightarrow f(x) = 0$.

Soit $\mathcal{K}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbf{R}$ à support borné.

Théorème 1 : Si f et g sont éléments de $\mathcal{K}$, $f * g$ est définie sur $\mathbf{R}$, continue, à support compact. $(\mathcal{K}, +, *)$ est une algèbre commutative et associative.

De plus, $$\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x).dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s).ds\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).dt\right).$$

Preuve :
Supposons f nulle hors de [a, b], g nulle hors de [c, d],
Fixons x. La fonction $t \to f(x-t).g(t)$ est continue par morceaux nulle hors de [c, d].
Donc $(f * g)(x) = \int_c^d f(x-t)g(t).dt$ est définie pour tout x.

$\forall x \notin [a+c, b+d] \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad f(x-t).g(t) = 0$, donc $(f * g)(x) = 0$.

L'application $(f, g) \to f * g$ est bilinéaire, commutative (changement de variable u = x – t).

Si f et g sont continues, $(f * g)(x) = \int_c^d f(x-t)g(t).dt$ est continue en vertu du théorème de continuité des intégrales à paramètres. Si g est en escaliers à support borné, g est combinaison linéaire de fonctions-portes, donc $f * g$ est continue. On en conclut que si f et g sont continues par morceaux, $f * g$ est continue.
L'associativité se montre par intégrales doubles.

Proposition 2 : Si l'une des fonctions f ou g est C^k $(0 \le k \le \infty)$, il en est de même de $f * g$.

Définition : On appelle **suite en delta** toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{K}$ vérifiant les trois axiomes :

$$(\Delta 1)\ \forall n\ \forall x\ \ \varphi_n(x) \ge 0 \qquad (\Delta 2)\ \forall n\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t).dt = 1 \qquad (\Delta 3)\ (\forall \alpha > 0)\ \lim_{n\to\infty}\int_{|t|\ge\alpha}\varphi_n(t).dt = 0.$$

Exemples : Soit φ un élément de $\mathcal{K}$ à valeurs ≥ 0 et tel que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).dt = 1$.

Il est facile de montrer que $\varphi_n(x) = n.\varphi(nx)$ est une suite en delta.
Les plus simples des fonctions φ sont les fonctions-portes $P_{-a,a}$ et les fonctions chapeau Ch_a.

Admettant que la fonction $\theta(x) = \exp\frac{1}{x^2-1}$ si $|x| < 1$, 0 si $|x| \ge 1$, est C^∞, on en déduit qu'il existe une suite en delta formée de fonctions C^∞.

Théorème 3 : Soit (φ_n) une suite en delta. Pour toute f continue à support borné, la suite $(f * \varphi_n)$ converge simplement vers f sur $\mathbf{R}$.

Indication de preuve : Noter que

$$(f * \varphi_n)(x) - f(x) = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\varphi_n(t).[f(x-t)-f(x)].dt + \int_{|t|\ge\alpha}\varphi_n(t).[f(x-t)-f(x)].dt\,.$$

Corollaire 1 : L'algèbre $(\mathcal{K}, +, *)$ est sans élément unité.

Preuve : Supposons que $(\mathcal{K}, +, *)$ ait un élément unité.

Il existerait une fonction δ telle que $\forall f \in \mathcal{K} \quad f * \delta = f$.

Considérons alors la suite en delta $\varphi_n(x) = n.\varphi(nx)$, où φ est la fonction chapeau Ch_1.

On aurait $\forall n \in \mathbf{N} \quad \varphi_n * \delta = \varphi_n$. En vertu du théorème 3, $(\varphi_n * \delta)(0) = \varphi_n(0) \to \delta(0)$.

Or $\varphi_n(0) = n/2 \to +\infty$. Impossible.

Remarque : Le grand physicien P.A.M. Dirac a introduit une « fonction » δ définie par

$$\delta(x) = 0 \text{ pour } x \neq 0 \quad , \quad \delta(0) = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x).dx = 1.$$

Une telle fonction n'existe pas, mais les mathématiciens ont montré qu'il existe bien un « objet » (une mesure, une distribution) satisfaisant à ces propriétés. La convolution a un élément neutre δ, mais cet objet n'est pas une fonction, il n'appartient pas aux espaces fonctionnels usuels, un peu comme l'unité imaginaire n'appartient pas aux nombres réels. Cette mesure de Dirac, on peut la voir comme « limite » d'une suite en delta (φ_n). C'est pourquoi les suites en delta s'appellent aussi « **approximations de l'unité** ».

Corollaire 2 : Toute fonction f continue à support borné est limite simple (et même uniforme) d'une suite de fonctions C^∞ à support borné.

Preuve : Il suffit de choisir une suite en delta formée de fonctions C^∞ à support borné.

2.2. Fonctions intégrables nulles à l'infini.

Espaces fonctionnels :

- $\mathcal{L}_\infty$ est l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur **R**.
- $\mathcal{C}_0$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur **R**, tendant vers 0 en ±∞.
- $\mathcal{L}_1$ est l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables sur **R**.
- $\mathcal{M} = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{L}_1$ l'espace des fonctions continues sur **R**, intégrables et tendant vers 0 en ±∞.
- $\mathcal{L}_2$ est l'espace vectoriel des fonctions continues et de carré intégrable sur **R**.

Proposition : Si f est élément de $\mathcal{L}_\infty$ et g est élément de $\mathcal{L}_1$, leur convolée $f * g$ est définie sur **R**, et est élément de $\mathcal{L}_\infty$.

Si de plus f est élément de $\mathcal{C}_0$, il en est de même de $f * g$.

Si f est C^n et a toutes ses dérivées $f^{(k)}$ ($0 \leq k \leq n$) bornées sur **R**, il en est de même de $f * g$.

Proposition : $\mathcal{M}$ est stable par convolution. $(\mathcal{M}, +, *)$ est une algèbre commutative, associative, sans élément unité.

Proposition : Si f et g sont éléments de $\mathcal{L}_2$, leur convolée $f * g$ est définie sur **R**.

3. Transformation de Fourier.

Soit f une fonction définie sur **R**, continue par morceaux sur tout segment, à valeurs réelles ou complexes. On appelle **transformée de Fourier** de f, la fonction F, notée aussi $\mathscr{F} f$ ou $\hat{f}$, définie sur **R** par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad F(x) = \mathscr{F} f(x) = \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t).dt\,.$$

Cette définition est incomplète : des hypothèses sur f sont nécessaires pour assurer la convergence, pour tout réel x, de l'intégrale à paramètre ci-dessus. Voici la plus simple :

Proposition 1 : Si la fonction f est intégrable sur **R**, sa transformée de Fourier est définie, continue et bornée sur **R**. De plus, elle tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

Preuve : Si f est intégrable, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|.dt$ converge, alors pour tout réel x, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t).dt$ est absolument convergente. Donc F est définie sur **R**.

Elle est continue en vertu du théorème de continuité des intégrales à paramètre :

La fonction $(x, t) \to e^{-ixt} f(t)$ est :

i) Pour tout x, continue par morceaux en t ;

ii) Pour tout t, continue en x ;

iii) Enfin, elle possède la majorante intégrable $|e^{-ixt} f(t)| = |f(t)|$.

De plus, F est bornée, car $|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|.dt$.

Enfin, pour montrer que F(x) tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, cassons F(x) en trois :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-A} e^{-ixt} f(t).dt + \int_{-A}^{B} e^{-ixt} f(t).dt + \int_{B}^{+\infty} e^{-ixt} f(t).dt\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons A et B > 0 tels que $\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|.dt \leq \varepsilon$ et $\int_{B}^{+\infty} |f(t)|.dt \leq \varepsilon$.

A et B étant ainsi choisis, nous savons que $\int_{-A}^{B} e^{-ixt} f(t).dt \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue. Par conséquent

$$\exists\alpha > 0 \quad \forall x \quad |x| \geq \alpha \ \Rightarrow\ \left|\int_{-A}^{B} e^{-ixt} f(t).dt\right| \leq \varepsilon \text{, et alors } |F(x)| \leq 3\varepsilon. \text{ Cqfd}$$

Proposition 2 : Si la fonction $t \to t^n f(t)$ est intégrable sur **R**, la transformée de Fourier de f est de classe C^n, et $F^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n e^{-ixt} f(t).dt$.

Si toutes les fonctions $t \to t^n f(t)$ sont intégrables sur **R**, la transformée de Fourier de f est de classe C^∞, et, pour tout n, $F^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n e^{-ixt} f(t).dt$.

Remarque : C'est le cas en particulier si pour tout n, $\lim_{t\to\pm\infty} t^n f(t) = 0$. De telles fonctions sont dites « à décroissance rapide ». Au fond, plus f tend vite vers 0 à l'infini, plus sa transformée de Fourier F est régulière.

Proposition 3 : Si f est paire, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t).dt = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(xt).f(t).dt$

Si f est impaire, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t).dt = -2i\int_{0}^{+\infty} \sin(xt).f(t).dt$.

Théorème 4 : Si f et g sont éléments de $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire intégrables et tendent vers 0 en $\pm\infty$,

$$\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F} f).(\mathscr{F} g).$$

Preuve : Une preuve formelle est facile, par intégrales doubles.

Elle est rigoureuse et élémentaire si f et g sont à support borné. Dans le cas général, il faut recourir à une version plus forte du théorème de Fubini.

Exemples :

1) Fonction porte.

Soit $a > 0$, $P_{-a,a}(t) = \frac{1}{2a}$ si $|t| < a$, 0 pour $|t| > a$ (peu importent les valeurs en $\pm a$),

alors $\mathcal{F} P_{-a,a}(x) = F(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} e^{-ixt}.dt = \frac{1}{2a}\left.\frac{e^{-ixt}}{-ix}\right|_{-a}^{+a} = \frac{e^{iax}-e^{-ax}}{2iax} = \frac{\sin(ax)}{ax}$ pour $x \neq 0$,

et $\mathcal{F} P_{-a,a}(0) = F(0) = 1$.

Bien entendu, $P_{-a,a}$ est à décroissance rapide, donc F est C^∞.

Remarque : Si $a \to 0+$, $P_{-a,a} \to \delta$, mesure de Dirac (en 0), et $\mathcal{F} P_{-a,a}(x) = \frac{\sin(ax)}{ax} \to 1$.

Ce qu'on peut noter $\mathcal{F}\delta = 1$. Ceci n'a pas de sens rigoureux dans le cadre de cet exposé.

2) Fonction chapeau.

Il s'agit de la fonction définie par $Ch_a(t) = \frac{1}{4a^2}(2a - |\,t\,|)$ pour $|t| \leq 2a$, $Ch_a(t) = 0$ sinon.

Par parité, $F(x) = \frac{1}{2a^2}\int_0^{2a}(2a-t).\cos(xt).dt$ = (une IPP) = $\frac{\sin^2(ax)}{a^2x^2}$.

Remarque : $Ch_a = P_{-a,a} * P_{-a,a}$ et $\mathcal{F}(Ch_a) = \mathcal{F}(P_{-a,a}).\mathcal{F}(P_{-a,a})$.

3) Fonction exponentielle.

Soit $a > 0$, $f(t) = e^{-a|t|}$. f est à décroissance rapide.

Par parité, $F(x) = 2\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-at}.dt = 2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-at}.dt = \frac{a}{a^2+x^2}$.

4) Fonctions gaussiennes.

Nous démontrerons en exercice que la gaussienne $g_a(t) = e^{-at^2}$ a pour transformée de Fourier $\hat{g}_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$. C'est encore une gaussienne…

4. Transformation de Fourier inverse.

Définition : Soit F une fonction définie sur **R**, continue par morceaux sur tout segment, et intégrable, à valeurs réelles ou complexes. On appelle **transformée de Fourier inverse** de F, la fonction f, notée aussi $\overline{\mathcal{F}} f$ ou $\hat{f}$, définie sur **R** par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(t) = \mathcal{F}^{-1}F(t) = \breve{F}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}F(x).dx\,.$$

Sous certaines hypothèses sur f, $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})\, f = f$.

Ce résultat peut être vérifié élémentairement sur les fonctions-porte, les fonctions-chapeaux, et les gaussiennes, et donc sur leurs combinaisons linéaires.

Théorème : Si f est continue et intégrable sur **R**, si $\mathcal{F} f$ est intégrable et si f est de classe C^1, alors : $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})\, f = f$.

5. Exercices corrigés.

Exercice 1 : Calculer, en fonction de $\hat{f}$, les transformées de Fourier des fonctions suivantes

$\overline{f(t)}$, $f(-t)$, $f(t-a)$, $f(at)$ ($a > 0$) , $e^{iat} f(t)$.

Solution :

Notons F = $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f, G la transformée de Fourier demandée.

a) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\,\overline{f(t)}.dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t).dt} = \overline{F(-x)}$.

b) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(-t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} f(u).du = F(-x)$ (chgt de var u = – t)

c) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t-a).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(u+a)} f(u).du = e^{-ixa}F(x)$ (chgt de var u = t – a)

d) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(at).dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu/a} f(u).du = \frac{1}{a}F(\frac{x}{a})$ (chgt de var u = at)

e) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{iat} f(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t} f(t).dt = F(x-a)$.

Exercice 2 : Transformée de Fourier d'une gaussienne.

On se donne $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de e^{-at^2}.

Solution : La fonction e^{-at^2} est intégrable et à décroissance rapide.

En vertu de ce qui précède, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-at^2}.dt$ est définie, C^∞ sur **R**, et tend vers 0 en ±∞.

Reste à calculer F(x).

1ère méthode : équation différentielle.

$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-ixt}e^{-at^2}.dt$ = (IPP) = $-\frac{x}{2a}F(x)$.

C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

Comme $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}.dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $F(x) = F(0).\,e^{-\frac{x^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

2ème méthode : développement en série. Formellement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-at^2}.dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-ixt)^n}{n!}e^{-at^2}.dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-ix)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-at^2}.dt$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-ix)^{2p}}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-at^2}.dt \quad \text{(si } n \text{ est impair, } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-at^2}.dt = 0\text{)}$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}\,2\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-at^2}.dt = \ldots = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{p!(4a)^p} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

car les intégrales $\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-at^2}.dt$ se ramènent à $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}.dt$ par des IPP.

Il reste à justifier l'intégration terme à terme des séries au moyen du théorème ad hoc.

3ème méthode : intégration complexe.

$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-at^2}.dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+\frac{ix}{a})^2-\frac{x^2}{4a}}.dt = e^{-\frac{x^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+\frac{ix}{a})^2}.dt$ par mise sous forme canonique.

Le changement de variable u = t + $\frac{ix}{a}$ donne alors : $F(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2}.du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Cette méthode est hélas ***erronée***, car la variable d'intégration n'est pas réelle !
On peut cependant la rendre rigoureuse, mais il faut passer par l'intégration complexe, en introduisant une intégrale curviligne convenable…

<u>Commentaires</u> : 1) La transformée d'une gaussienne est encore une gaussienne.

2) On constate que pour a et $b > 0$, $\mathfrak{F}(g_a * g_b) = \mathfrak{F}(g_a).\mathfrak{F}(g_b)$.

3) On constate que $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(g_a)) = 2\pi\, g_a$.

4) La fonction G_{m,σ^2} a pour transformée de Fourier $e^{-\frac{\sigma^2}{2}x^2 - imx}$.

et l'on retrouve $\mathfrak{F}(G_{m+m',\sigma^2+\sigma'^2}) = \mathfrak{F}(G_{m,\sigma^2}).\mathfrak{F}(G_{m',\sigma'^2})$.

<u>Exercice 3</u> : Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$f(t) = t^n e^{-at}\,Y(t)$, $f(t) = t\,e^{-a|t|}$, $f(t) = t\,e^{-at^2}$, $f(t) = \dfrac{1}{t^2+a^2}$ ($a > 0$).

<u>Solution</u> :

i) Y est la fonction de Heaviside (1 si t > 0, 0 si t < 0).

$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} t^n e^{-at} Y(t).dt = \int_0^{+\infty} t^n e^{-(a+ix)t}.dt = \dfrac{n}{a+ix}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(a+ix)t}.dt$ par IPP,

donc $F(x) = \dfrac{n!}{(a+ix)^n}\int_0^{+\infty} e^{-(a+ix)t}.dt = \dfrac{n!}{(a+ix)^{n+1}}$.

ii) Rappelons que, si $a > 0$, $f(t) = e^{-a|t|}$ a pour transformée de Fourier :

On a vu $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-a|t|}.dt = \dfrac{a}{a^2+x^2}$. Dérivons ! $F'(x) = -\,i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\, t e^{-a|t|}.dt = \dfrac{-2ax}{(a^2+x^2)^2}$.

Par conséquent, $t\,e^{-a|t|}$ a pour transformée de Fourier $\dfrac{-2iax}{(a^2+x^2)^2}$.

iii) De même, e^{-at^2} a pour transformée de Fourier $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-at^2}.dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\; e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Dérivons ! $F'(x) = -\,i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\, t e^{-at^2}.dt = -\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\;\dfrac{x}{2a}\; e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Par conséquent, $t\,e^{-at^2}$ a pour transformée de Fourier $-\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\;\dfrac{ix}{2a}\; e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

iv) Je dis que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-ixt}}{t^2+a^2}.dt = \dfrac{\pi}{a}\, e^{-a|x|} = \dfrac{\pi}{a}\,[\, Y(x).\, e^{-ax} + Y(-x).\, \dfrac{\pi}{a}\, e^{ax}\,]$

Il n'est pas facile de démontrer directement cette identité.
La méthode de l'équation différentielle pose des difficultés.

La fonction $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-ixt}}{t^2+a^2}.dt$ satisfait formellement $-\,F''(x) + a^2\, F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.dt$,

mais cette intégrale diverge !
On peut sortir du cadre de cet exposé en notant que :

$$-\,F''(x) + a^2\, F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.dt = \mathfrak{F}(1)(x) = 2\pi\delta(x),$$

où δ est la distribution de Dirac…
On peut rester dans le domaine élémentaire, en introduisant la suite de fonctions :

$F_n(x) = \int_{-n}^{+n} \dfrac{e^{-ixt}}{t^2+a^2}.dt$, qui satisfont $-\,F_n''(x) + a^2\, F_n(x) = \int_{-n}^{+n} e^{-ixt}.dt = 2\,\dfrac{\sin(nx)}{x}$,

Puis intégrer cette équation différentielle et faire tendre n vers l'infini.

Le plus simple cependant est d'utiliser la <u>formule d'inversion de Fourier</u>.

6. Avec Maple.

Maple contient un package de transformations intégrales (Laplace, Fourier, Mellin, Hilbert, Hankel), qui confirme les résultats précédents.

```
> with(inttrans);
```

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

```
> assume(a>0);fourier(exp(-a*t^2),t,x);
fourier(t*exp(-a*t^2),t,x);
fourier(exp(-a*abs(t)),t,x);
simplify(fourier(t*exp(-a*abs(t)),t,x));
```

$$\sqrt{\frac{\pi}{a\sim}}\, e^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{a\sim}\right)}$$

$$\frac{\frac{-1}{2} I \sqrt{\pi}\, x\, e^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{a\sim}\right)}}{a\sim^{(3/2)}}$$

$$2\,\frac{a\sim}{a\sim^2+x^2}$$

$$\frac{-4\, I\, a\sim x}{(a\sim^2+x^2)^2}$$

```
> simplify(invfourier(sqrt(Pi/a)*exp(-x^2/(4*a)),x,t));
invfourier(2*a/(a^2+x^2),x,t);
```

$$e^{(-a\sim t^2)}$$

$$e^{(-a\sim t)}\,\mathrm{Heaviside}(t) + e^{(a\sim t)}\,\mathrm{Heaviside}(-t)$$

```
> fourier(1,t,x);
```

$$2\,\pi\,\mathrm{Dirac}(x)$$

```
> invfourier(2*Pi*Dirac(x),x,t);
```

$$1$$