Feuille 5 de TD. Transformation de Laplace

1. (Calculs explicites de transformées de Laplace.) Calculer les transformées de Laplace de

$$H,\ f(t)=\begin{cases} t, & \text{si } 0\le t\le 1\\ 0, & \text{sinon}\end{cases},\ f(t)=tH(t),\ f(t)=t^nH(t),\ f(t)=e^{-\alpha t}H(t),$$

$$f(t)=\cos(\omega t)H(t), f(t)=\sin(\omega t)H(t),\ f(t)=t\sin(\omega t)H(t),\ f(t)=t\cos(\omega t)H(t),$$

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}H(t), f(t)=\sinh(\omega t)H(t),\ f(t)=\cosh(\omega t)H(t),$$

$$f(t)=\begin{cases}\sin(t-3\pi/4), & \text{si } t>3\pi/4\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}.$$

2. (Calculs explicites de transformées de Laplace inverses.) Pour chacune des fonctions φ suivantes, trouver une fonction causale f telle que $\mathscr{L}f=\varphi$.

$$\varphi(p)=\frac{1}{(p+2)(p-1)},\ \varphi(p)=\frac{p}{(p+1)(p^2+1)},\ \varphi(p)=\frac{p^2+5}{p(p^2+4)},\ \varphi(p)=\ln\frac{p^2+a^2}{p^2}.$$

[Indication pour la dernière question : résoudre d'abord $\mathscr{L}g=\varphi'$.]

3. On considère l'équation différentielle (1) $y''+2y'+y=\psi(t)$, $t\ge 0$.

1. On suppose $\psi(t)=\sin t$. Trouver la solution de (1) vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.
2. On suppose $\psi(t)=e^{-t}$. Trouver la solution de (1) vérifiant $f(0)=0$ et $f'(0)=2$.

4. En utilisant les propriétés de la transformation de Laplace, déterminer des fonctions causales vérifiant les équations suivantes :

1. Pour tout $t\ge 0$, $\displaystyle\int_0^t e^{t-x}f(x)\,dx=\sin t$.
2. Pour tout $t\ge 0$, $\displaystyle f(t)+\int_0^t e^{-x}f(t-x)\,dx=\cos t$.

5. On cherche les solutions causales de l'équation différentielle (2) $t\,y''+y'+t\,y=0$ telles que $y(0+)=1$.

1. Que vaut $y'(0+)$? Exprimer les transformées de Laplace de $t\,y''$, y' et $t\,y$ en fonction de $\mathscr{L}\,y$ et de ses dérivées.
2. On rappelle que $p\,\mathscr{L}\,y(p) = y'(p) + y(0+)$. Par suite, quelle est la limite de $p\,\mathscr{L}\,y(p)$ lorsque $p \to \infty$?
3. Appliquer la transformation de Laplace à (2) pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\mathscr{L}\,y$.
4. Résoudre cette dernière équation, et en déduire $\mathscr{L}\,y$.
5. Calculer $\mathscr{L}(y * y)$, et en déduire la convolution $y * y$.