Analyse T4, TD n° 5 / Vendredi 14 octobre 2016

Transformation de Laplace

1. Définition, abscisse de convergence.

2. Propriétés générales.

3. Valeur initiale, valeur finale.

4. Table de transformées de Laplace usuelles.

5. Transformée de Laplace inverse.

6. Introduction au calcul symbolique.

7. Exercices corrigés.

8. Feuilles de calcul Maple.

9. Un peu d'histoire.

Pierre-Jean Hormière

LAPLACE.

La transformation de Laplace est, avec la transformation de Fourier, l'une des plus importantes transformations intégrales. Elle intervient dans de nombreuses questions de physique mathématique, de calcul des probabilités, d'automatique, etc., mais elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitimement le nom de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), surnommé le « Newton français », éphémère ministre de l'intérieur de Napoléon Bonaparte, qui avait commencé ses travaux dès les années 1770, sous l'Ancien régime. En effet, Laplace a souligné l'intérêt de présenter la plupart des fonctions, des suites, des sommes partielles et restes de séries usuelles sous forme intégrale, afin d'en obtenir des développements. Sous l'influence de Liouville, le hongrois Joseph Petzval (1807-1891) fut le premier à étudier la transformation de Laplace en tant que telle, et ses applications aux équations différentielles linéaires. Plus tard, l'ingénieur britannique Oliver Heaviside (1850-1925) a inventé le calcul symbolique afin de résoudre des équations différentielles et intégrales. Laurent Schwartz (1915-2002) a étendu la transformation de Laplace aux distributions, permettant de mieux comprendre et étayer le calcul symbolique.

1. Définition, abscisse de convergence.

Définition : Soit $f : [0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment. On appelle **transformée de Laplace** de f la fonction de variable réelle ou complexe :

$$\mathrm{F}(p) = \mathfrak{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t).dt\ .$$

Soit f : **R** $\to$ **R** ou **C** une fonction continue par morceaux sur tout segment. On appelle **transformée de Laplace** de f la fonction de variable réelle ou complexe :

$$F(p) = \mathfrak{L}f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}.f(t)H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t).dt\ .$$

où H(t) est la fonction de Heaviside définie par H(t) = 0 pour t < 0, 1 pour t > 0.

La fonction f(t) est appelée <u>original</u>, <u>fonction objet</u>, ou <u>fonction causale</u>. La fonction F(p) est appelée <u>image</u> de f(t). On note $f(t)$] F(p) cette correspondance.

La variable de F est traditionnellement notée p en France et en Allemagne, s dans les pays anglo-saxons…

Se posent naturellement les problèmes suivants :

- En quels points la fonction F est-elle définie ?
- Quelles sont ses propriétés à l'intérieur de son domaine de définition ?
- Quelles sont ses propriétés au bord de ce domaine ?
- Quelles sont les propriétés algébriques, différentielles et intégrales, de la transformation de Laplace $\mathfrak{L} : f \to F$?
- Peut-on remonter de F à f ? Autrement dit, y a-t-il une transformée de Laplace inverse ?

Notons D(f) l'ensemble des complexes $p = a + ib$ tels que la fonction t $\to$ $e^{-pt} f(t)$ est intégrable sur]0, +∞[, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t).dt$ est absolument convergente.

D(f) est appelé **domaine d'absolue convergence** de la transformée de Laplace.

Comme $|e^{-pt} f(t)| = e^{-at} | f(t) |$, $p \in D(f) \Leftrightarrow a = \mathrm{Re}(p) \in D(f)$.

De plus, si $p \in D(f)$, alors pour tout $a' > a$, $e^{-a't} f(t)$ est intégrable.

On en déduit que l'ensemble D(f) est de l'une des quatre formes suivantes :

$$\varnothing\ ,\ \mathbf{C}\ ,\ \{\ p\ ;\ \mathrm{Re}\,p \in\ ]A, +\infty[\ \}\ \text{ ou }\ \{\ p\ ;\ \mathrm{Re}\,p \in [A, +\infty[\ \}.$$

Le réel A = $a(f)$ est appelé **abscisse d'absolue convergence** de la transformée de Laplace.

On convient que A = +∞ si D(f) = ∅ , A = –∞ si D(f) = **C**.

<u>Exemples</u> :

1) Si $f(t) = \exp(t^2)$, D(f) = ∅, car t $\to$ $e^{-pt}\, e^{t^2}$ n'est jamais intégrable.

2) Si f(t) = 0 ou si $f(t) = \exp(-t^2)$, D(f) = **C**, car t $\to$ $e^{-pt} f(t)$ est toujours intégrable.

3) Si f(t) = 1 ou H(t), D(f) = { p ; Re p > 0 } et $\mathfrak{L}(1)(p) = \mathfrak{L}(H)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.dt = \frac{1}{p}$.

4) Si $f(t) = e^{at}$ ou e^{at} H(t), D(f) = { p ; Re p > a } et

$$\mathfrak{L}(e^{at})(p) = \mathfrak{L}(e^{at}H(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}.dt = \frac{1}{p-a}\ .$$

5) Si $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$, D(f) = { p ; Re $p \geq 0$ }.

6) Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, D(f) = { p ; Re p > 0 }.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une fonction f ait une transformée de Laplace :

Proposition : Soit f :]0, +∞[$\to$ **R** ou **C** continue par morceaux sur tout segment.

Si l'intégrale $\int_0^1 |f(t)|.dt$ converge, et si $\exists(M, \gamma, A)\ \ \forall t \geq A\ \ |f(t)| \leq M e^{\gamma t}$, D(f) est non vide.

La fonction f est dite <u>d'ordre exponentiel</u> si elle vérifie cette dernière condition.

2. Propriétés générales.

Dans la suite, on utilise librement la notation abusive $\mathrm{F}(p) = \mathcal{L}(f(\mathrm{t}))(p)$ pour $f(\mathrm{t})$] $\mathrm{F}(p)$.
La variable p est supposée réelle.

Proposition 1 : linéarité.
Si D(f) et D(g) sont non vides, D($\alpha.f + \beta.g$) est non vide et, sur D(f) $\cap$ D(g) :

$$\mathcal{L}(\ \alpha.f + \beta.g\ )(p) = \alpha.\mathcal{L}(f)(p) + \beta.\mathcal{L}(g)(p).$$

Proposition 2 : translation.
Si D(f) est non vide, pour tout α, D($e^{-\alpha t} f(t)$) est non vide et $\quad \mathcal{L}(\ e^{-\alpha t} f(t)\ )(p) = (\mathcal{L} f\ )(p + \alpha)$.

Preuve : $\mathcal{L}(\ e^{-\alpha t} f(t)\ )(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t).dt\ = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t).dt\ = (\mathcal{L} f\ )(p + \alpha)$.

Proposition 3 : retard.
Si D(f) est non vide, $a > 0$, $\mathrm{g}(t) = f(t - a)$ pour $t > a$ pour $t < a$, et

$$\mathcal{L}(\ f(t-a)\ )(p)\ =\ e^{-ap}\,(\mathcal{L} f\ )(p)\ .$$

Preuve : $\mathcal{L}(\ g\ )(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t).dt\ = \int_0^{a} e^{-pt} g(t).dt\ + \int_a^{+\infty} e^{-pt} g(t).dt\ = \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a).dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} f(u).du\ =\ e^{-ap}\,(\mathcal{L} f\ )(p).$$

Proposition 4 : changement d'échelle.

Si D(f) est non vide, D($f(at)$) est non vide pour tout $a > 0$, et $\mathcal{L}(\ f(at))(p) = \dfrac{1}{a}\,(\mathcal{L} f)(\dfrac{p}{a}\ )$.

Preuve : $\mathcal{L}(\ f(at))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at).dt\ = \dfrac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-pu/a} f(u).du\ = \dfrac{1}{a}\,(\mathcal{L} f\ )(\dfrac{p}{a}\ )$.

Proposition 5 : dérivée de l'image.
Si D(f) est non vide, la fonction $\mathcal{L} f = \mathrm{F}$ est de classe C^{∞} sur l'intervalle $]a(f), +\infty[$, et

$$\mathcal{L}(\ t^{\mathrm{n}} f(t))(p)\ =\ (-1)^{\mathrm{n}}\,\mathrm{F}^{(\mathrm{n})}(p).$$

Preuve : Ici, la variable p est supposée réelle.
Soit $p > a(f)$. Choisissons b tel que $a(f) < b < p$.
La fonction $e^{-bt}|f(t)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $t^{\mathrm{n}} e^{-pt}|f(t)| = \mathrm{O}(\ e^{-bt}|f(t)|\ )$ au V($+\infty$),
chacune des fonctions $t^{\mathrm{n}} e^{-pt} f(t)$ est intégrable.
Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique :

- Chaque fonction $t \to\ t^{\mathrm{n}} e^{-pt} f(t)$ est continue par morceaux et intégrable ;
- Chaque fonction $p \to\ t^{\mathrm{n}} e^{-pt} f(t)$ est continue ;
- Pour $p \geq b > a(f)$, $t^{\mathrm{n}} e^{-pt}|f(t)|\ \leq\ \mathrm{M}\,e^{-bt}|f(t)|$, majorante intégrable. Cqfd.

Corollaire : Si $f(\mathrm{t})$ est à valeurs réelles positives, F(p) est positive, décroissante, convexe, et complètement monotone, en ce sens que sa dérivée n-ème est du signe de $(-1)^{\mathrm{n}}$.

Proposition 5 : image de la dérivée.
Si f est C^1 sur $\mathbf{R}_+$, alors $\qquad \mathcal{L}(f')(p)\ =\ p\,\mathrm{F}(p) - f(0)$.
Si f est C^2 sur $\mathbf{R}_+$, alors $\qquad \mathcal{L}(f'')(p)\ =\ p^2\,\mathrm{F}(p) - p\,f(0) - f'(0)$.
Si f est C^{n} sur $\mathbf{R}_+$, alors

$$\mathcal{L}(f^{(\mathrm{n})})(p) =\ p^{\mathrm{n}}\,\mathrm{F}(p) - (\ p^{\mathrm{n}-1} f(0) + p^{\mathrm{n}-2} f'(0) + \ldots + p\,f^{(\mathrm{n}-2)}(0)\ + f^{(\mathrm{n}-1)}(0)\ ).$$

Preuve : Il suffit d'intégrer par parties.

Proposition 6 : image de l'intégrale.

Si D(f) est non vide et si f est continue par morceaux $\mathfrak{L}\left(\int_0^t f(u).du \right)(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Proposition 7 : convolution.

Soient f et g deux fonctions continues $[0, +\infty[\to \mathbf{C}$, d'ordre exponentiel, leur produit de convolution $f * g$, défini par $\forall x \geq 0 \quad (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t).g(t).dt$.

est continue, d'ordre exponentiel, et $\mathfrak{L}(f * g)(x)(p) = \mathfrak{L}(f)(p).\mathfrak{L}(g)(p)$.

Preuve : le schéma de la preuve, basé sur les intégrales doubles, est le suivant :

$$\mathfrak{L}(f * g)(x)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}(f*g)(x).dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_0^x f(x-t).g(t).dt\right).dx$$

$$= \iint_\Delta f(x-t)g(t)e^{-px}.dt.dx = \iint_\Delta f(x-t)g(t)e^{-p(x-t)}e^{-pt}.dt.dx$$

$$= \iint_\Delta f(x-t)g(t)e^{-p(x-t)}e^{-pt}.dx.dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} f(x-t)g(t)e^{-p(x-t)}e^{-pt}.dx\right).dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} f(x-t)e^{-p(x-t)}.dx\right).g(t)e^{-pt}.dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}.du\right).g(t)e^{-pt}.dt$$

$$= \int_0^{+\infty} F(p)g(t)e^{-pt}.dt = \mathrm{F}(p).\mathrm{G}(p) = \mathfrak{L}(f)(p).\mathfrak{L}(g)(p).$$

3. Valeur initiale, valeur finale.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Supposons sa transformée de Laplace $\mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$ définie pour $p > 0$, autrement dit $a(f) \leq 0$.

Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de F(p) quand $p \to +\infty$ et quand $p \to 0+$. Pour cela, observons que $p.\mathrm{F}(p) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$, où $\int_0^{+\infty} pe^{-pt}.dt = 1$.

p.F(p) est la moyenne des valeurs f(t) prises par f, pondérées par les poids $p\,e^{-pt}$ dt .

3.1. Comportement de F(p) quand $p \to +\infty$.

Lorsque p tend vers $+\infty$, les poids $p\,e^{-pt}$ dt se concentrent au voisinage de 0+, de sorte que F(p) dépend de plus en plus des valeurs de f(t) au voisinage de 0+ à mesure que p augmente. Pour obtenir un équivalent ou un développement asymptotique de F(p) au V($+\infty$), il suffira de remplacer, dans F(p), $f(t)$ par son équivalent ou son développent asymptotique en 0+. C'est la **méthode de Laplace**, ou **propriété de la valeur initiale**.

Théorème de la valeur initiale.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$, continue par morceaux sur tout segment, vérifiant :

(L) $(\exists r)\quad f(s) = O(e^{rs})$ au V($+\infty$) .

F(p) est définie pour $p > r$, et $\lim_{p\to+\infty} p.\mathrm{F}(p) = \lim_{t\to 0+} f(t)$.

On trouvera en exercices des applications et des généralisations de cet important résultat.

3.2. Comportement de F(p) quand $p \to 0+$.

Lorsque 0 est à l'intérieur de D(f), i.e. $a(f) < 0$, F(p) est développable en série entière en 0 et il n'y a pas de problème.

Si 0 est au bord de D(f), i.e. $a(f) = 0$, les poids $p\,e^{-pt}\,dt$ se répartissent de manière de plus en plus homogène à mesure que $p \to 0+$, de sorte que F(p) dépend de plus en plus des valeurs prises par f(t) en $+\infty$, ou, disons, de son comportement général moyen sur $\mathbf{R}^*_+$. C'est la **propriété de la valeur finale**.

Théorème de la valeur finale.

1) Si f est intégrable sur $\mathbf{R}^*_+$, alors $F = \mathfrak{L}(f)$ est définie pour $p \geq 0$, et continue en 0.

2) Si f est intégrable sur]0, 1] et a une limite ω en $+\infty$, F(p) est définie pour $p > 0$ et

$$\lim_{p\to 0+} p.F(p) = \lim_{t\to +\infty} f(t) = \omega.$$

Preuve : laissée en exercice.

4. Table de transformées de Laplace usuelles.

De même qu'il existe des tables de primitives usuelles, des tables de développements limités usuels, il existe des tables de transformées de Fourier et des tables de transformées de Laplace de fonctions usuelles. Dans la table ci-dessous, il faudrait en toute rigueur indiquer les abscisses de convergence.

f(t)	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$
1 ou H(t)	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ ou $e^{\alpha t}$H(t)	$\frac{1}{p-\alpha}$
cos(ωt) sin(ωt)	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
ch(ωt) sh(ωt)	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
t^n ou t^n H(t)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}$ ou $t^n e^{\alpha t}$ H(t)	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

De cette table et des règles de calcul ci-dessus, on déduit que la transformation de Laplace induit un isomorphisme de l'espace vectoriel des exponentielles-polynômes, c'est-à-dire les combinaisons linéaires des fonctions $t^n e^{\alpha t}$ (α réel ou complexe), sur l'espace vectoriel des fractions rationnelles de degré < 0.

5. Transformée de Laplace inverse.

Si f(t) a pour transformée de Laplace F(p), $F = \mathfrak{L} f$, on écrit symboliquement $f = \mathfrak{L}^{-1} F$ et l'on dit que f est *une* transformée de Laplace inverse de F.

Attention, la transformation de Laplace n'est pas injective !

– D'une part, seules interviennent les valeurs prises par f(t) sur t > 0. Les fonctions 1 et H(t) ont même transformée de Laplace.

– D'autre part, deux fonctions qui diffèrent sur $\mathbf{R}^*_+$ peuvent avoir même image de Laplace. Une fonction nulle presque partout a une transformée de Laplace nulle.

Les fonctions $f(t) = e^{-2t}$ et $g(t) = 0$ pour t = 5, e^{-2t} pour $t \neq 5$, ont même transformée de Laplace : $(\mathscr{L} f)(p) = (\mathscr{L} g)(p) = \frac{1}{p+2}$.

Cependant, la transformation de Laplace est injective si on la restreint à certaines classes de fonctions : exponentielles-polynômes, théorème de Lerch...

6. <u>Introduction au calcul symbolique</u>.

Le calcul symbolique, ou calcul opérationnel, fut inventé par Heaviside pour résoudre notamment les équations et les systèmes différentiels linéaires, mais aussi certaines équations intégrales. Il établit un pont entre analyse et algèbre. Nous allons le développer sur quelques exemples.

<u>Exemple 1</u> : <u>Résoudre l'équation différentielle</u> y'' + 3y' + 2y = t , y(0) = y'(0) = 0.

C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
Notons $F(p) = (\mathscr{L} f)(p)$ la transformée de Laplace de y(t).

$$\mathscr{L}(y'' + 3y' + 2y)(p) = \mathscr{L}(t)(p)$$

$$p\,(\,p.F(p) - y(0)\,) - y'(0) + 3p\,(\,F(p) - y(0)\,) + 2\,F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$(\,p^2 + 3p + 2\,).F(p) - 4p\,y(0) - y'(0) = \frac{1}{p^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+2}.$$

La décomposition en éléments simples de la fraction permet de remonter à la fonction causale. $F(p)$ est transformée de Laplace de :

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Cette méthode fournit le résultat juste, mais elle pose des problèmes de rigueur.
<u>1er problème</u> : la solution y(t) a-t-elle une transformée de Laplace ?
Il faudrait montrer que les solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants et avec un second membre exponentielle-polynôme sont toutes dominées par $O(e^{Mt})$ pour un M convenable. C'est bien le cas, en effet.
<u>2ème problème</u> : il manque un argument d'unicité pour remonter de $F(p)$ à la source y(t).
Il faudrait démontrer que la transformation de Laplace $y(t) \to F(p)$ est injective sur une classe suffisamment vaste de fonctions (exponentielles-polynômes notamment).

<u>Exemple 2</u> : <u>Trouver la fonction f continue de **R** dans **R** vérifiant</u> :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t).f(t).dt \qquad \text{(E)}.$$

C'est une équation fonctionnelle de convolution, qui s'écrit : $f(x) = x^2 + (\sin * f)(x)$.

Notons $F(p) = (\mathscr{L} f)(p)$ la transformée de Laplace de $f(x)$.

Il vient $F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{p^2+1}$, donc $F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5}$.

$F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(x) = x^2 + \frac{1}{12}x^4$.

La réciproque est facile.
NB : On pourrait donner une solution directe plus rigoureuse et plus élémentaire.

En effet, (E) s'écrit : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = x^2 + \sin x.\int_0^x \cos t.f(t).dt - \cos x.\int_0^x \sin t.f(t).dt$.

On en déduit que f est C^1 et, de proche en proche, C^∞. Si on la dérive deux fois, on tombe sur une équation différentielle…

7. Exercices corrigés.

Exercice 1 : **Calculs explicites de transformées de Laplace**.

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$H(t)\ ,\ f(t) = 1 \text{ si } 0 \le t \le 1, 0 \text{ sinon}\ ,\ t.H(t)\ ,\ t^n.H(t)\ ,\ e^{-\alpha t}H(t)$$

$$f(t) = \cos(\omega t).H(t)\ ,\ f(t) = \sin(\omega t).H(t)\ ,\ f(t) = t.\sin(\omega t).H(t)\ ,\ f(t) = t.\cos(\omega t).H(t)$$

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}.H(t)\ ,\ f(t) = \text{sh}(\omega t).H(t)\ ,\ f(t) = \text{ch}(\omega t).H(t)$$

$$f(t) = \sin(t - \frac{3\pi}{4}) \text{ si } t > \frac{3\pi}{4}\ ,\ 0 \text{ sinon.}$$

Solution : Dans ces solutions nous supposons la variable p réelle.

a) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.dt = \frac{1}{p}$ pour $p > 0$.

b) $F(p) = \int_0^{1} e^{-pt} f(t).dt = \int_0^{1} e^{-pt}.dt = \frac{1-e^{-p}}{p}$ pour tout p.

On pourrait observer que $f(t) = H(t) - H(t-1)$ et utiliser linéarité et déplacement.
Plus généralement, considérons, pour tout $h > 0$, la fonction en escaliers :

$P_h(t) = \frac{1}{h}$ si $0 < t < h$, 0 sinon (les valeurs en 0 et h importent peu).

On a $P_h f(t) = \frac{1}{h}(H(t) - H(t-h))$. Par linéarité et théorème du retard, $(\mathcal{L} P_h)(p) = \frac{1-e^{-hp}}{hp}$.

Si l'on fait tendre h vers 0+ dans cette formule, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}\,\delta = 1\ ,\ \text{où } \delta \text{ est la distribution de Dirac …}}$$

Cela suppose que l'on étende la transformation de Laplace aux distributions de Schwartz.

c) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}tH(t).dt = \int_0^{+\infty} te^{-pt}.dt = \frac{1}{p^2}$ pour $p > 0$.

d) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}t^nH(t).dt = \int_0^{+\infty} t^ne^{-pt}.dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour $p > 0$ (chgt de var $pt = u$).

e) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-\alpha t}H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t}.dt = \frac{1}{p+\alpha}$ pour $p > -\alpha$.

f) $\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\omega t}H(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\omega t}.dt = \frac{e^{(-p+i\omega)t}}{-p+i\omega}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-i\omega} = \frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}$ pour $p > 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(\omega t)H(t).dt = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin(\omega t)H(t).dt = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

<u>Conséquence</u> : par linéarité, la transformée de Laplace de $f(t) = 3.\sin 4t - 2.\cos 5t$

est $$F(p) = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

g) Par linéarité, $f(t) = \text{sh}(\omega t).H(t) = \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}H(t)$ et $f(t) = \text{ch}(\omega t).H(t) = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}H(t)$

ont pour images respectives

$$F(p) = \frac{1}{2}(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad \text{et} \quad F(p) = \frac{1}{2}(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}) = \frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

h) La fonction $f(t) = \sin(t - \frac{3\pi}{4})$ si $t > \frac{3\pi}{4}$, 0 sinon, n'est autre que

$$f(t) = \sin(t - \frac{3\pi}{4}).H(t - \frac{3\pi}{4}) .$$

On peut calculer sa transformée de Laplace directement, ou utiliser le théorème du retard :

$$F(p) = \mathfrak{L}(\sin t)(p + \frac{3\pi}{4}) = \frac{e^{-3\pi/4}}{p^2+1} .$$

Exercice 2 : Domaines de définition et calcul des transformées de Laplace des fonctions suivantes : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $f(t) = t^{a-1}$ ($a > 0$) , $f(t) = \ln t$.

Solution : Ici, f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
Dans les trois cas, on montre que $D(f) =]0, +\infty[$. Le chgt de var $pt = u$ donne :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}}.dt = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}.du = \frac{1}{\sqrt{p}} \Gamma(1/2) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} .$$

$F(p) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-pt}.dt = \frac{1}{p^a} \int_0^{+\infty} u^{a-1}e^{-u}.du = \frac{1}{p^a} \Gamma(a)$, par définition de la fonction Γ.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \ln t.e^{-pt}.dt = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \ln u.e^{-u}.du - \frac{\ln p}{p} = \frac{c-\ln p}{p} = \frac{-\gamma-\ln p}{p} ,$$

car la constante $c = \int_0^{+\infty} \ln u.e^{-u}.du$ se trouve être égale à $-\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Exercice 3 : Soit f une fonction T-périodique ($T > 0$), continue par morceaux sur tout segment. Montrer que $F(p) = \mathfrak{L}(f)(p)$ est définie pour tout $p > 0$ et que

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t).dt .$$

En déduire que : $\lim_{p\to 0+} p.F(p) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t).dt$.

Applications : Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
a) La fonction f 2π-périodique définie par : $f(t) = \sin t$ si $0 < t < \pi$, $f(t) = 0$ si $\pi < t < 2\pi$.
b) La fonction $f(t) = |\sin t|$
c) La fonction f $2a$-périodique définie par $f(t) = 1$ si $0 < t < a$, -1 si $a < t < 2a$.

Solution : f est bornée sur **R**, donc pour tout $p > 0$, $e^{-pt} f(t)$ est intégrable.

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-p(nT+u)} f(u).du = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT} \int_0^T e^{-pu} f(u).du$$

$$= (\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}).\int_0^T e^{-pu} f(u).du = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t).dt \quad \text{(somme d'une série géométrique)}.$$

$p.F(p) = \frac{p}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t).dt \to \frac{1}{T} \int_0^T f(t).dt$ quand $p \to 0+$.

On trouve $F(p) = \frac{1}{(1-e^{-\pi p})(p^2+1)}$, $F(p) = \frac{1}{p^2+1} \coth \frac{\pi p}{2}$, $F(p) = \frac{1}{p} \ln \frac{ap}{2}$.

Exercice 4 : Domaines de définition et calculs des transformées de Laplace de
a) $f(t) = [t]$ (partie entière) b) $f(t) = r^n$ si $n < t < n + 1$ ($r > 0$).

Solution : On trouvera resp.

$D(f) =]0, +\infty[$ et $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(1-e^{-p})}$, $D(f) =]\ln r, +\infty[$ et $F(p) = \dfrac{1-e^{-p}}{p}\,\dfrac{1}{1-re^{-p}}$.

Exercice 5 : Intégrale de Frullani.

Soient a et b des réels > 0, $f(t) = \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$. Trouver la transformée de Laplace de $f(t)$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}.dt$.

Solution : résumée.

On trouve $D(f) =]\max(-a, -b), +\infty[$. On trouve $F(p) = \ln\dfrac{p+b}{p+a}$ (considérer $F'(p)$)

Du coup, $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}.dt = \ln\frac{b}{a}$.

Exercice 6 : Pour $(n, \lambda) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{R}$, soit $f_{n,\lambda}$ définie par $f_{n,\lambda}(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{\lambda t}$ si $t > 0$, 0 si $t < 0$.

Vérifier que $\forall(m, n) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ $\forall\lambda \in \mathbf{R}$ $f_{m,\lambda} * f_{n,\lambda} = f_{m+n,\lambda}$.

Calculer la transformée de Laplace de $f_{n,\lambda}(t)$, et vérifier que $\mathcal{L}(f_{m,\lambda} * f_{n,\lambda}) = \mathcal{L}(f_{m,\lambda}).\mathcal{L}(f_{n,\lambda})$.

Solution partielle : Si $F_{n,\lambda}$ est la transformée de Laplace de $f_{n,\lambda}$, $F_{n,\lambda}(p) = \dfrac{1}{(p-\lambda)^n}$

Exercice 7 : Calculs explicites de transformées de Laplace inverses.

Pour chacune des fonctions φ suivantes, trouver une fonction causale f telle que $\mathcal{L} f = \varphi$:

$$\varphi(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} \ , \ \varphi(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} \ , \ \varphi(p) = \frac{p^2+5}{p(p^2+4)} \ , \ \varphi(p) = \ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2}.$$

[Indication pour la dernière question : résoudre d'abord $\mathcal{L} g = \varphi'$].

Solution :

a) Décomposons en éléments simples $\varphi(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p-1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p+2}\right)$

a pour fonction causale $f(t) = \dfrac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) = \dfrac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\mathrm{sh}\dfrac{3t}{2} = \dfrac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\mathrm{sh}(\dfrac{3t}{2})\,H(t)$.

b) De même, $\varphi(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p+1}{p^2+1} - \dfrac{1}{p+1}\right)$

a pour fonction causale $f(t) = \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t})$.

c) Enfin, $\varphi(p) = \dfrac{p^2+5}{p(p^2+4)} = \dfrac{5}{4}\,\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{p}{p^2+4}$

a pour fonction causale $f(t) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}\cos(2t)$.

d) La fonction $\varphi(p) = \ln\dfrac{p^2+\alpha^2}{p^2}$ n'est pas rationnelle, mais sa dérivée l'est.

$\varphi'(p) = -\dfrac{1}{2p} + \dfrac{2p}{p^2+a^2}$ a pour fonction causale $g(t) = -\dfrac{1}{2} + 2\cos(at)$.

$\varphi(p)$ a donc pour fonction causale $f(\mathrm{t}) = 2\dfrac{1-\cos(at)}{t}$.

Exercice 8 : Trouver une fonction causale f(t) ayant pour transformée de Laplace
$\varphi(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$. Transformée de Laplace de f(t)/t ?

Solution : Après décomposition en éléments simples,
$\varphi(p) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p+3}$ est transformée de Laplace de $f(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \dfrac{1}{2}e^{-3t}$.

g(t) = f(t)/t a pour transformée de Laplace $-\dfrac{1}{2}\ln(p+1) + \ln(p+2) - \dfrac{1}{2}\ln(p+3)$.
Passer par la dérivée…

Exercice 9 : On considère l'équation différentielle (1) y'' + 2y' + y = ψ(t) , t $\geq$ 0.
1) On suppose ψ(t) = sin t. Trouver la solution de (1) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
2) On suppose $\psi(\mathrm{t}) = e^{-t}$. Trouver la solution de (1) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

Solution :
Ce sont des équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.
<u>1ère méthode : méthode classique</u>.
L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ a une racine double, donc (e^{-t}, te^{-t}) est un système fondamental de solutions.
1) L'équation $f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t}) = \sin \mathrm{t}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$
équivaut à $(f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t}))e^t = e^t \sin \mathrm{t}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$
Posons $g(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t})e^t$. Alors $g''(\mathrm{t}) = e^t \sin \mathrm{t}$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$.
Deux quadratures conduisent à $g(\mathrm{t}) = \dfrac{3}{2}(t+1) - \dfrac{1}{2}e^{-t}\cos \mathrm{t}$, puis $f(\mathrm{t}) = \dfrac{3}{2}e^{-t}(t+1) - \dfrac{1}{2}\cos \mathrm{t}$.
2) De même $f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t}) = e^{-t}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$
équivaut à $(f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t}))e^t = 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$
Posons $g(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t})e^t$. Alors $g''(\mathrm{t}) = 1$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 2$.
Deux quadratures conduisent à $g(\mathrm{t}) = \dfrac{t^2}{2} + 2\mathrm{t}$, puis $f(\mathrm{t}) = (\dfrac{t^2}{2} + 2\mathrm{t})e^{-t}$.
<u>2ème méthode : calcul symbolique</u>.
Notons F(p) la transformée de Laplace de f(t).
Alors $\mathfrak{L}(f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t})) = (p^2 + 2p + 1)\mathrm{F}(p) - (p+2)f(0) - f'(0)$.
1) L'équation $f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t}) = \sin \mathrm{t}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$
conduit à $(p^2 + 2p + 1)\mathrm{F}(p) - (p+2) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t.dt = \dfrac{1}{p^2+1}$.

Donc $\mathrm{F}(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p+1)^2} + \dfrac{p+2}{(p+1)^2} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(p+1)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+1}$
Il reste à revenir à f(t) au moyen des tables…
2) L'équation $f''(\mathrm{t}) + 2f'(\mathrm{t}) + f(\mathrm{t}) = e^{-t}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$
conduit à $(p^2 + 2p + 1)\mathrm{F}(p) - 2 = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^t.dt = \dfrac{1}{p+1}$.

Donc $F(p) = \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3}$.

Il reste à revenir à $f(t)$…

<u>Exercice 10</u> : En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, déterminer des fonctions causales vérifiant :

(1) $\forall t \geq 0 \quad \int_0^t e^{t-x} f(x).dx = \sin t$ (2) $\forall t \geq 0 \quad f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x).dx = \cos t$.

<u>Solution</u> : Ce sont deux équations fonctionnelles intégrales.

<u>1ère méthode : élémentaire</u>.

<u>Cherchons une fonction continue f de $\mathbf{R}_+$ (ou de $\mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}$ vérifiant (1)</u>.

Alors $e^t \int_0^t e^{-x} f(x).dx = \sin t$, donc $\int_0^t e^{-x} f(x).dx = e^{-t} \sin t$.

Dérivons les deux membres ! $e^{-t} f(t) = e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$, donc $f(t) = \cos t - \sin t$.

Réciproquement, cette fonction vérifie bien (1)

<u>Cherchons une fonction continue f de $\mathbf{R}_+$ (ou de $\mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}$ vérifiant (2)</u>.

Alors $f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x).dx = f(t) + \int_0^t e^{-t+u} f(u).du = f(t) + e^{-t} \int_0^t e^{u} f(u).du = \cos t$.

Comme $t \to \int_0^t e^{u} f(u).du$ est C^1, f l'est aussi. Dérivons $e^t f(t) + \int_0^t e^{u} f(u).du = e^t \cos t$.

Il vient $e^t f(t) + e^t f'(t) + e^t f(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$, donc $f'(t) + 2 f(t) = \cos t - \sin t$.

De plus, $f(0) = 1$. Cette équation différentielle a pour solution :

$$f(t) = \frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{3}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t.$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction satisfait (2)

<u>2ème méthode : transformation de Laplace</u>.

L'équation intégrale (1) est une équation de convolution, qui s'écrit $\exp * f = \sin$.

Appliquons la transformée de Laplace : $\mathcal{L}(\exp).\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\sin)$

$$\frac{1}{p-1}.F(p) = \frac{1}{p^2+1}, \quad \text{donc } F(p) = \frac{p-1}{p^2+1}.$$

Remontant à la fonction causale, $f(t) = \cos t - \sin t$. La réciproque reste à faire…

L'équation intégrale (2) est une équation de convolution, qui s'écrit $f + \exp(-t) * f = \cos$.

Appliquons la transformée de Laplace : $\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(\exp(-t)).\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\cos)$

$$F(p) + \frac{1}{p+1}.F(p) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \text{donc } F(p) = \frac{p(p+1)}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{p+2} + \frac{3p-1}{p^2+1}\right).$$

Il reste à remonter à la fonction causale, et à montrer la réciproque.

<u>Exercice 11</u> : Trouver les $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = x + \int_0^x \cos(x-t).f(t).dt$.

<u>Solution</u> *:* Réponse : $\boxed{f(x) = x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{x/2}.\sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x) - e^{x/2}.\cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x)}$.

On montre que f est C^∞ et vérifie : $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + f(x) - \int_0^x f(t)\sin(x-t).dt$, $f'(0) = 1$, et $f''(x) = f'(x) - \int_0^x f(t)\cos(x-t).dt = f''(x) - f'(x) + f(x) = x$.

```
> dsolve({diff(y(x),x,x)-diff(y(x),x)+y(x)=x,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{(1/2\,x)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)\sqrt{3} - \mathrm{e}^{(1/2\,x)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right) + 1 + x$$

```
> f:=x->1/3*exp(1/2*x)*sin(1/2*sqrt(3)*x)*sqrt(3)-
exp(1/2*x)*cos(1/2*sqrt(3)*x)+1+x:
> simplify(f(x)-x-int(f(t)*cos(x-t),t=0..x));
```

$$0$$

Solution par calcul symbolique de Heaviside, *i.e.* transformation de Laplace.

```
> with(inttrans) :
> laplace(t,t,x);laplace(cos(t),t,x);
```

$$\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{x^2+1}$$

```
> solve(F=1/x^2+x/(x^2+1)*F,F);
```

$$\frac{x^2+1}{x^2\,(x^2+1-x)}$$

```
> invlaplace(1/x^2/(x^2+1-x),x,t);
```

$$t + 1 - \mathrm{e}^{(1/2\,t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{(1/2\,t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)$$

Exercice 12 : Soient f et g deux fonctions continues de **R** dans **R**. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) $\forall x \in \mathbf{R}\;\; g(x) = f(x) + \int_0^x (x-t).f(t).dt$ ii) $\forall x \in \mathbf{R}\;\; f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t).g(t).dt$.

Solution :

Il existe une solution élémentaire de cet exercice. Voici une solution par calcul symbolique.

Il s'agit de démontrer que $g = f + t * f \;\Leftrightarrow\; f = g - \sin * g$.

Notons F et G les transformées de Laplace de f et g. Il s'agit de vérifier que

$$\mathrm{G}(p) = \mathrm{F}(p) + \frac{1}{p^2}F(p) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{F}(p) = \mathrm{G}(p) - \frac{1}{p^2+1}.G(p).$$

Ce qui est immédiat…

Exercice 13 : On cherche les solutions de l'équation différentielle (2) t.y'' + y' + t.y = 0 telles que y(0+) = 1.

1) Que vaut y'(0+) ? Exprimer les transformées de Laplace de t.y'', y' et t.y en fonction de $\mathcal{L}$ y et de ses dérivées.

2) On rappelle que p ($\mathcal{L}$ y)(p) = ($\mathcal{L}$ y')(p) + y(0+). Par suite, quelle est la limite de p.($\mathcal{L}$ y)(p) quand $p \to +\infty$?

3) Appliquer la transformation de Laplace à (2) pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{L}$ y.

4) Résoudre cette dernière équation, et en déduire $\mathcal{L}$ y.

5) Calculer $\mathcal{L}$(y ∗ y) et en déduire la convolution y ∗ y.

Solution :

0) Préliminaires.

(2) est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients variables, que l'on intègre séparément sur]−∞, 0[et sur]0, +∞[. Le théorème de Cauchy linéaire

affirme que les solutions de (2) forment un plan vectoriel. Mais il n'y a pas de méthode élémentaire générale pour intégrer cette équation.
De fait, (2) est une équation de Bessel particulière. Un système fondamental de solutions en est formé de deux fonctions non élémentaires, les fonctions de Bessel $J_0(t)$ et $Y_0(t)$.
La condition y(0+) = 1 implique que y(t) = $J_0(t)$.
Pour montrer cela, le plus simple est de chercher les solutions de (2) développables en série entière. On trouve à un facteur près :

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2.4^2} - \frac{t^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{t^{2p}}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est infini, de sorte que $J_0(t)$ est définie et C^∞ sur **R**. Un argument de wronskien permet d'établir que les solutions non colinéaires à J_0 tendent vers $\pm\infty$ en 0+.

On démontre que plus que $J_0(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t.\sin\theta).d\theta$.

Nous allons utiliser la méthode de la transformation de Laplace, mais cette méthode, utilisée *ex abupto*, a un inconvénient : elle suppose que la fonction y existe.

Notons $F(p) = (\mathscr{L}\,y)(p) = \int_0^{+\infty}e^{-pt}y(t).dt$ cette transformée.

1) Je dis que y'(0+) = 0. Je n'ai pas de preuve simple de ce résultat.
Exprimons les transformées de Laplace de t.y'', y' et t.y en fonction de F(p).

- $\mathscr{L}$(t.y(t))(p) = – F'(p).
- $\mathscr{L}$(y'(t))(p) = p F(p) + y'(0+) = p F(p).
- $\mathscr{L}$(t.y''(t))(p) = – p F(p) + y(0+) – p (F(p) + p.F'(p)).

2) On rappelle que p F(p) = ($\mathscr{L}$ y')(p) + y(0+) par intégration par parties.
On en déduit que p.F(p) $\to$ 1 quand $p \to +\infty$.
3) Appliquons la transformation de Laplace à (2). Il vient :

$$(p^2 + 1)\, F'(p) + p\, F(p) = 0$$

4) Cette équation différentielle scalaire s'intègre en $F(p) = \frac{A}{\sqrt{p^2+1}}$.

Comme $F(p) = \int_0^{+\infty}e^{-pt}y(t).dt \sim \frac{y(0+)}{p} = \frac{1}{p}$ quand $p \to +\infty$ en vertu de 2)
(mais surtout en vertu de la propriété de la valeur initiale, ou méthode de Laplace), il vient

$$A = 1 \text{ , donc } F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

5) Alors $\mathscr{L}(y * y)(p) = \mathscr{L}(y)(p).\mathscr{L}(y)(p) = F(p)^2 = \frac{1}{p^2+1} = \mathscr{L}(\sin t)(p)$.

On en déduit (ou plutôt on en *induit*) que $(y * y)(t) = \int_0^t y(t-u).y(u).du = \sin t$.

<u>Exercice 14</u> : <u>Calcul de</u> $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}.dt$.

Dans ce problème, x est une variable réelle.

1) a) Domaine de définition de la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.dt$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$; calculer F'(x).

c) Limite de F en $+\infty$? Conséquence ?

2) On note $\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}.du$ pour tout réel t.

a) Montrer que $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}.Si(t).dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*_+$.

b) Montrer que $x.G(x) \to I$ quand $x \to 0+$.

c) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que F est continue en 0.

d) Applications : calculer I , $\int_0^{+\infty} e^{-t}.\frac{\sin t}{t}.dt$, etc.

Solution :

1) Une transformée de Laplace.

a) Domaine de définition de $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.dt$.

La fonction $t \to \frac{\sin t}{t}$ est continue, et même somme d'une série entière sur $\mathbf{R}$; elle est bornée car $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$. Pour tout $x > 0$ la fonction $t \to \frac{\sin t}{t}e^{-xt}$ est donc intégrable. Pour $x = 0$, elle est semi-intégrable. Pour $x < 0$, elle n'est ni intégrable, ni semi-intégrable, car $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.dt$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. (poser $t = n\pi + \theta$ …). Le critère de Cauchy est donc violé.

Conclusion : La fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.dt$ est définie sur $\mathbf{R}_+$.

b) Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$, et calculons $F'(x)$.

La fonction $f : (x, t) \to \frac{\sin t}{t}e^{-xt}$ a une dérivée partielle en x, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin t.\, e^{-xt}$.

Pour tout $x > 0$, $f(x, .)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ sont continues par morceaux et intégrables.

Pour tout $t > 0$, $f(., t)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ sont continues.

Pour tout $a > 0$, pour tout $x \geq a$ et tout $t > 0$, $|f(x, t)| \leq \frac{\sin t}{t}e^{-at}$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sin t.\, e^{-at}$, qui sont des majorantes intégrables.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique et montre que F est C^1 et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t.e^{-xt}.dt = -\mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{(i-x).t}.dt = -\mathrm{Im}\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty} = -\mathrm{Im}\frac{1}{x-i} = -\frac{1}{x^2+1} .$$

c) Limite de F en $+\infty$ et conséquences.

Elémentairement, $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}.dt = \frac{1}{x}$, donc $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée.

Conclusion : Pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.dt = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$.

On aimerait faire tendre x vers 0 dans cette identité. Si $\frac{\sin t}{t}$ était intégrable sur $\mathbf{R}_+$, il suffirait de noter que $F(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, par convergence dominée. Malheureusement, elle n'est que semi-intégrable, et le programme n'autorise pas ce passage à la limite.

2) Une deuxième transformée de Laplace.

a) Montrons que $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}.Si(t).dt$ est définie sur $\mathbf{R}^*_+$.

La fonction « sinus intégral » Si(t) = $\int_0^t \frac{\sin u}{u}.du$ est continue et même développable en série entière sur **R**, et elle a une limite en +∞, donc elle est bornée sur $\mathbf{R}_+$.
Il en résulte aussitôt que, pour tout $x > 0$, $t \to \mathrm{Si}(t)\, e^{-xt}$ est intégrable.

b) <u>Montrons que $x.G(x) \to I$ quand $x \to 0+$</u> .

Un changement de variable donne $xG(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}.Si(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}.Si(\frac{u}{x}).du$.

Or $e^{-u}\,\mathrm{Si}(\frac{u}{x})$ tend simplement vers $I.e^{-u}$ quand x tend vers 0+.

Et on a la condition de domination $\left| e^{-u}\,\mathrm{Si}(\frac{u}{x}) \right| \le \|\mathrm{Si}\|_\infty\, e^{-u}$.

Donc x G(x) tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-u}.I.du$ = I.

<u>Remarque</u> : On peut aussi montrer cela directement par soustraction et cassage en deux.

c) <u>Intégrons par parties</u> !

$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}.Si'(t).dt = [e^{-xt}\,\mathrm{Si}(t)]_0^{+\infty} + xG(x) = xG(x) \to I = F(0)$ quand x tend vers 0. cqfd

<u>Conclusion</u> : Pour tout $x \ge 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}.dt = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x}$.

En particulier $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin t}{t}.dt = \frac{\pi}{4}$, etc.

<u>Exercice 15</u> : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux vérifiant :
(L 1) $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + O(t^{n+1})$ au V(0)
(L 2) $\exists r$ $f(s) = O(e^{rs})$ au V(+∞).
Montrer que f admet une transformée de Laplace F(p), définie pour p assez grand, et que

$$F(p) = a_0 \frac{1}{p} + a_1 \frac{1}{p^2} + \dots + a_n \frac{n!}{p^{n+1}} + O(\frac{1}{p^{n+2}}) \text{ au V}(+\infty).$$

<u>Application</u> : étudier en détail les fonctions :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t+1}}.dt \quad , \quad F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t^2+1}}.dt \quad , \quad F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{t^2+1}.dt .$$

<u>Solution</u> :

<u>Exercice 16</u> : <u>Théorème de la valeur initiale</u>.

Cet exercice suppose connue la fonction $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}.e^{-t}.dt$ ($a > 0$).

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{C}$, continue par morceaux sur tout segment, vérifiant les 2 propriétés :
(L 1) $(\exists c \ne 0)$ $(\exists \alpha > 0)$ $f(t) \sim c.\, t^{\alpha-1}$ au V(0+)
(L 2) $(\exists r)$ $f(t) = O(e^{rt})$ au V(+∞) .

F(p) est définie pour $p > r$, et $F(p) \sim F_0(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} c t^{\alpha-1}.dt = c\frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}$ au V(+∞) .

<u>Solution</u> : <u>Indication</u> : On écrira $F(p) - F_0(p) = \int_0^a + \int_a^{+\infty}$, et on choisira convenablement a.

<u>Exercice 17</u> : <u>Intégrales de Wallis</u>.

On nomme ainsi les intégrales $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta . d\theta$.

1) Montrer que la suite (W_n) tend vers 0, par convergence dominée.

2) Mettre, au moyen d'un changement de variable convenable, W_n sous la forme

$$W_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t).dt \;, \quad \text{où } f \text{ est une fonction à déterminer.}$$

3) En déduire un équivalent et un développement asymptotique à tous ordres de la suite (W_n), à l'aide du théorème de la valeur initiale.

__Solution__ : cf feuille de calcul Maple ci-dessous.

8. __Feuilles de calculs Maple__.

Le package « inttrans » de transformations intégrales de Maple (Laplace, Fourier, Mellin, Hilbert, Hankel) permet de résoudre et de retrouver les exercices précédents.

```
> with(inttrans);
```

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

__Exercice 1__ :

```
> laplace(1,t,p);laplace(Heaviside(t),t,p);
```

$$\frac{1}{p} \qquad \frac{1}{p}$$

```
> laplace(t*Heaviside(t),t,p);assume(n >= 0);laplace(t^n*Heaviside(t),t,p);
```

$$\frac{1}{p^2} \qquad \frac{\Gamma(n\sim)\, n\sim}{p^{n\sim}\, p}$$

```
> laplace(exp(-a*t)*Heaviside(t),t,p);
laplace(cos(omega*t)*Heaviside(t),t,p);
laplace(sin(omega*t)*Heaviside(t),t,p);
simplify(laplace(t*cos(omega*t)*Heaviside(t),t,p));
laplace(t*sin(omega*t)*Heaviside(t),t,p);
```

$$\frac{1}{p+a}$$

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$-\frac{-p^2+\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2} \qquad 2\,\frac{\omega\, p}{(p^2+\omega^2)^2}$$

```
> laplace(cosh(omega*t)*Heaviside(t),t,p);
laplace(sinh(omega*t)*Heaviside(t),t,p);
simplify(laplace(t*cosh(omega*t)*Heaviside(t),t,p));
laplace(t*sinh(omega*t)*Heaviside(t),t,p);
```

$$\frac{p}{p^2-\omega^2} \qquad \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$\frac{p^2+\omega^2}{(-p^2+\omega^2)^2} \qquad 2\,\frac{\omega\, p}{(p^2-\omega^2)^2}$$

```
> f:=t->piecewise(t<0, 0,t > 0 and t < 1,1,t > 1, 0);laplace(f(t),t,p);
laplace(Heaviside(t)*Heaviside(1-t),t,p);
```

$$f := t \to \mathrm{piecewise}(t < 0, 0, 0 < t \text{ and } t < 1, 1, 1 < t, 0)$$

$$\mathrm{laplace}\left(\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & -t < 0 \text{ and } t < 1, t, p \\ 0 & 1 < t \end{cases}\right)$$

$$-\frac{e^{(-p)} - 1}{p}$$

```
> laplace(sin(t-3*Pi/4)*Heaviside(t-3*Pi/4),t,p);
```

$$\frac{e^{(-3/4\, p\, \pi)}}{p^2 + 1}$$

__Exercice 7__ :

```
> phi:=p->1/((p+2)*(p-1));invlaplace(phi(p),p,t);convert(phi(p),parfrac,p);
```

$$\phi := p \to \frac{1}{(p+2)(p-1)} \qquad \frac{2}{3} e^{(-1/2\, t)} \sinh\left(\frac{3}{2} t\right) \qquad -\frac{1}{3} \frac{1}{p+2} + \frac{\frac{1}{3}}{p-1}$$

```
> phi:=p->p/((p+1)*(p^2+1));invlaplace(phi(p),p,t);
convert(phi(p),parfrac,p);
```

$$\phi := p \to \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} \qquad -\frac{1}{2} e^{(-t)} + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \qquad -\frac{1}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{\frac{1}{2}(p+1)}{p^2+1}$$

```
> phi:=p->(p^2+5)/(p*(p^2+4));invlaplace(phi(p),p,t);
convert(phi(p),parfrac,p);
```

$$\phi := p \to \frac{p^2+5}{p(p^2+4)} \qquad \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\cos(2\, t) \qquad \frac{5}{4}\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+4}$$

```
> phi:=p->ln((p^2+a^2)/p^2);invlaplace(phi(p),p,t);
convert(diff(phi(p),p),parfrac,p);
```

$$\phi := p \to \ln\left(\frac{p^2+a^2}{p^2}\right) \qquad 2\,\frac{1-\cos(\sqrt{a^2}\, t)}{t} \qquad -2\frac{1}{p} + \frac{2\, p}{p^2+a^2}$$

__Exercice 8 :__

```
> with(inttrans);
> phi:=p->1/((p+1)*(p+2)*(p+3));convert(phi(p),parfrac,p);
invlaplace(phi(p),p,t);
```

$$\phi := p \to \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \frac{\frac{1}{2}}{p+3}$$

$$\frac{1}{2} e^{(-t)} - e^{(-2\, t)} + \frac{1}{2} e^{(-3\, t)}$$

```
> laplace(1/t*(1/2*exp(-t)-exp(-2*t)+1/2*exp(-3*t)),t,p);
```

$$-\frac{1}{2}\ln(p+1) + \ln(p+2) - \frac{1}{2}\ln(p+3)$$

__Exercice 9__ :

```
> ed:=diff(f(t),t,t)+2*diff(f(t),t)+f(t);
```

$$ed := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathrm{f}(t)\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(t)\right) + \mathrm{f}(t)$$

__Solution élémentaire__ :

```
> dsolve(ed=psi(t),f(t));
```

$$f(t) = e^{(-t)}\_C2 + e^{(-t)}\, t\_C1 + \left(-\int t\,\psi(t)\,e^t\,dt + \int \psi(t)\,e^t\,dt\; t\right) e^{(-t)}$$

```
> dsolve({ed=sin(t),f(0)=1,D(f)(0)=0},f(t));
```

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{(-t)} + \frac{3}{2}e^{(-t)}\,t - \frac{1}{2}\cos(t)$$

```
> dsolve({ed=exp(-t),f(0)=0,D(f)(0)=2},f(t));
```

$$f(t) = 2\,e^{(-t)}\,t + \frac{1}{2}t^2\,e^{(-t)}$$

Solution par calcul symbolique :

```
> with(inttrans);
```

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

```
> alias(F=laplace(f(t),t,p));L:=expand(laplace(ed,t,p));
```

$$F, F(p)$$

$$L := F + 2\,p\,F - D(f)(0) - 2\,f(0) + p^2\,F - p\,f(0)$$

```
> S:=convert(subs([f(0)=1,D(f)(0)=0],solve(L=laplace(sin(t),t,p),F)),
parfrac,p);invlaplace(S,p,t);
```

$$S := \frac{3}{2}\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t\right)e^{(-t)} - \frac{1}{2}\cos(t)$$

```
> T:=convert(subs([f(0)=0,D(f)(0)=2],solve(L=laplace(exp(-t),t,p),F)),
parfrac,p);invlaplace(T,p,t);
```

$$T := \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2}$$

$$\frac{1}{2}(t^2 + 4\,t)\,e^{(-t)}$$

Exercice 10 :

```
> with(inttrans);
```

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

```
> S:=solve(laplace(exp(t),t,p)*F(p)=laplace(sin(t),t,p),F(p));
```

$$S := \frac{p-1}{p^2+1}$$

```
> invlaplace(S,p,t);
```

$$\cos(t) - \sin(t)$$

```
> T:=convert(solve(F(p)+F(p)*laplace(exp(-t),t,p)
=laplace(cos(t),t,p),F(p)),parfrac,p);
```

$$T := \frac{2}{5}\frac{1}{p+2} + \frac{\frac{1}{5}(-1+3\,p)}{p^2+1}$$

```
> invlaplace(T,p,t);
```

$$\frac{2}{5}e^{(-2\,t)} + \frac{3}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$$

Exercice 11 :

```
> ed:=t*diff(y(t),t,t)+diff(y(t),t)+t*y(t)=0;
```

$$ed := t\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{y}(t)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{y}(t)\right)+t\,\mathrm{y}(t)=0$$

```
> dsolve(ed,y(t));
```

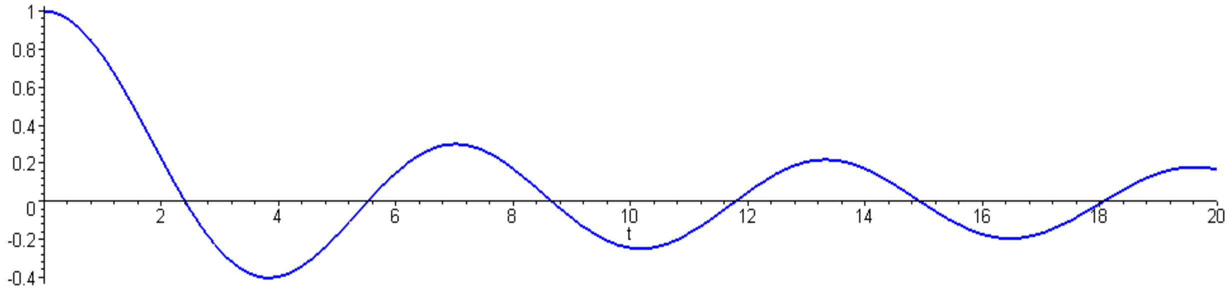
$$\mathrm{y}(t)=\_C1\ \mathrm{BesselJ}(0,t)+\_C2\ \mathrm{BesselY}(0,t)$$

```
> f:=t->a*BesselJ(0,t)+b*BesselY(0,t);series(f(t),t=0,4);
```

$$f := t \to a\ \mathrm{BesselJ}(0,t)+b\ \mathrm{BesselY}(0,t)$$

$$\left(a+b\left(2\,\frac{-\ln(2)+\ln(t)}{\pi}+\frac{2\,\gamma}{\pi}\right)\right)+\left(-\frac{1}{4}a+b\left(-\frac{1}{2}\,\frac{-\ln(2)+\ln(t)}{\pi}-\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma}{\pi}\right)\right)t^2+$$
$$\mathrm{O}(t^4)$$

```
> plot(BesselJ(0,t),t=0..20,thickness=2,color=blue);
```




```
> restart;with(inttrans);
```

[*addtable*, *fourier*, *fouriercos*, *fouriersin*, *hankel*, *hilbert*, *invfourier*, *invhilbert*, *invlaplace*, *invmellin*, *laplace*, *mellin*, *savetable*]

```
> alias(F=laplace(y(t),t,p));
L:=expand(laplace(t*diff(y(t),t,t)+diff(y(t),t)+t*y(t),t,p));
```

$$F$$

$$L := -p\,F-p^2\left(\frac{\partial}{\partial p}F\right)-\left(\frac{\partial}{\partial p}F\right)$$

```
> dsolve((p^2+1)*diff(G(p),p)+p*G(p)=0,G(p));
```

$$\mathrm{G}(p)=\frac{\_C1}{\sqrt{p^2+1}}$$

<u>Exercice 12</u> :

```
> with(inttrans);
> G:=t->int(sin(u)/u,u=0..t);G(t);
```

$$G := t \to \int_0^t \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

$$\mathrm{Si}(t)$$

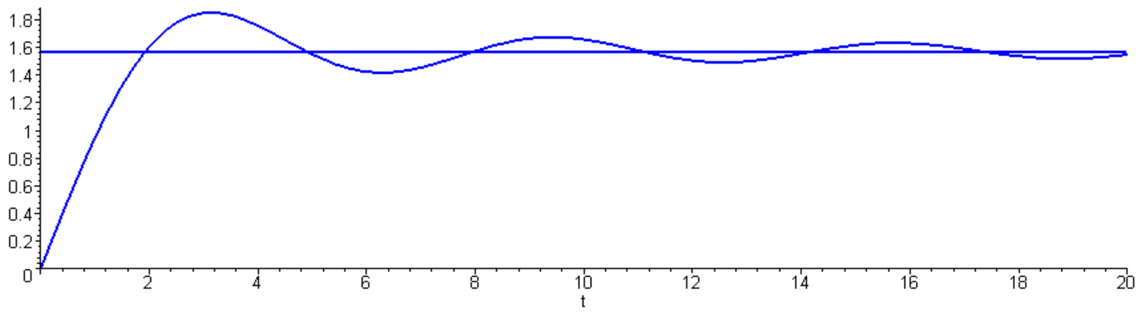
```
> laplace(Si(t),t,p);laplace(sin(t)/t,t,p);laplace(sin(t),t,p);
```

$$\frac{\mathrm{arccot}(p)}{p}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{1}{p^2+1}$$

```
> plot([Si(t),Pi/2],t=0..20,color=blue,thickness=2);
```



Exercice 17 : intégrales de Wallis.

```
> with(student):with(inttrans):
> W:=n->Int(sin(theta)^n,theta=0..Pi/2);
```

$$W := n \to \int_0^{1/2\,\pi} \sin(\theta)^n \, d\theta$$

```
> changevar(sin(theta)=exp(-t),W(n),t);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^{(-t)})^n}{e^t \sqrt{1 - \frac{1}{(e^t)^2}}} \, dt$$

```
> f:=t->1/sqrt(exp(2*t)-1);dl:=series(f(t),t=0,7);
```

$$f := t \to \frac{1}{\sqrt{e^{(2\,t)} - 1}}$$

$$dl := \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{t} + \frac{1}{48}\sqrt{2}\,t^{(3/2)} + \frac{1}{96}\sqrt{2}\,t^{(5/2)} - \frac{1}{1280}\sqrt{2}\,t^{(7/2)} - \frac{19}{23040}\sqrt{2}\,t^{(9/2)} + \mathrm{O}(t^{(11/2)})$$

```
> laplace(dl,t,n);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{n^{(3/2)}} + \frac{\frac{1}{64}\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{n^{(5/2)}} + \frac{\frac{5}{256}\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{n^{(7/2)}} - \frac{21}{4096}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{n^{(9/2)}} - \frac{399}{16384}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{n^{(11/2)}} + \mathrm{laplace}(\mathrm{O}(t^{(11/2)}), t, n)$$

Mais Maple sait aussi calculer les intégrales de Wallis à l'aide des fonctions eulériennes !

```
> U:=n->int(sin(theta)^n,theta=0..Pi/2);U(n);
expand(simplify(asympt(U(n),n,7)));
```

$$U := n \to \int_0^{1/2\,\pi} \sin(\theta)^n \, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{n}}}{n} + \frac{1}{64}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^2} + \frac{5}{256}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^3}$$
$$- \frac{21}{4096}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^4} - \frac{399}{16384}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^5} + \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^6}\right)$$

---

9. Un peu d'histoire.

« Refuserais-je mon repas pour la seule raison que je ne comprends pas le processus de digestion ? »

Oliver Heaviside

Leonhard Euler, Pierre-Simon Laplace, Joseph Petzval, Oliver Heaviside, Mathias Lerch, Laurent Schwartz : la transformation dite de Laplace pose d'intéressants problèmes historiques et épistémologiques, sur les rapports entre physique et mathématiques, sur les processus de l'invention mathématique, sur les relations complexes entre imagination et rigueur.

La vie de Oliver Heaviside (Camden Town, Londres, 1850 - Torquay, Devon, 1925), ingénieur et physicien britannique autodidacte et créatif, illustre bien ces problèmes. Une scarlatine lui laissa des séquelles, entraînant une surdité croissante, et rendant difficiles ses relations avec autrui. Il obtint cependant de bons résultats scolaires. S'il quitta l'école à 16 ans, il continua à apprendre, le morse, l'électricité, le danois, l'allemand. Son oncle Charles Wheatstone (qui donna son nom au dispositif électrique appelé pont de Wheatstone) l'encouragea à devenir télégraphiste. En 1868, Heaviside partit au Danemark comme téleg-raphiste. De retour en Angleterre en 1871, il prit un poste de chef opérateur à Newcastle upon Tyne, au bureau de la *Great Northern Telegraph Company*, qui s'occupait de trafic maritime. Il poursuivit ses recherches sur l'électricité, publiant en 1872 et 73 deux articles qui attirèrent l'attention de Maxwell. Celui-ci en mentionna les résultats dans son *Treatise on Electricity and Magnetism*, et ce traité intéressa tant Heaviside qu'il abandonna son métier pour se consacrer à l'étudier. Il y passa plusieurs années, soutenu financièrement par son frère. Heaviside n'était pas intéressé par la rigueur, et avait gardé mauvais souvenir des cours de géométrie euclidienne. Cependant il simplifia grandement les 20 équations à 20 variables de Maxwell et les remplaça par 2 équations à 2 variables. Pour résoudre des questions d'électrotechnique, il développa entre 1880 et 1887 un calcul opérationnel ou symbolique, remplaçant l'opérateur $\frac{d}{dx}$ par une variable p, afin de transformer l'équation différentielle en une équation algébrique, puis convertissant au moyen de tables la solution de l'équation algébrique en solution de l'équation différentielle. Cette méthode, très efficace, restait purement empirique et dut attendre les travaux de Bromwich pour commencer à être validée. Elle fut contestée, d'une part par Burnside, qui rejeta un article d'Heaviside pour manque de rigueur, et d'autre part par les quaternionistes, Tait notamment, qui rejetaient les méthodes vectorielles de Gibbs et Heaviside. Dans un article publié en 1887, Heaviside donna les conditions nécessaires pour transmettre un signal sans distorsion : il suggère d'augmenter l'induction au moyen d'un solénoïde. Rejetée en Angleterre, cette idée fut brevetée aux Etats-Unis en 1904. Cependant les travaux d'Heaviside commençaient à être reconnus : dans son adresse inaugurale comme Président des ingénieurs électriciens, Thomson le décrit comme une autorité. Compte tenu de l'intérêt de ses travaux le gouvernement lui octroya une pension, et il fut élu en 1891 membre de la *Royal Society*. En 1902, il prédit qu'il y avait dans l'atmosphère une couche conductrice permettant aux ondes radios de suivre la courbure de la Terre ; l'existence de cette couche fut établie en 1923, avant qu'elle ne soit popularisée par une chanson de Lloyd Webber, *Voyage vers la couche d'Heaviside*... Malgré les honneurs reçus, Heaviside devint de plus en plus amer avec le temps. Il s'installa en 1909 à Torquay, où il montra des signes évidents de complexe de persécution, et vécut comme un ermite. Au dire des voisins, *« dans sa maison, des blocs de granit tenaient lieu de meubles, et il errait de pièce en pièce, tel un géant néolithique, hirsute et de plus en plus sale, excepté ses ongles soigneusement manucurés et peints en un brillant rose cerise.»*

Heaviside a introduit l'analyse vectorielle parallèlement à Josiah Gibbs. Trouvant mal-commode l'utilisation des quaternions en physique il sépare du produit de deux quaternions purs identifiés aux vecteurs de $\mathbf{R}^3$, la partie réelle d'une part et la partie vectorielle d'autre part : la première est l'opposé du produit scalaire, la deuxième le produit vectoriel. Mais c'est surtout pour son calcul symbolique qu'il est connu. Selon Whittaker, ce fut l'une des trois plus importantes découvertes de la fin du XIXème siècle. En 1926, Wiener, Carson et P. Lévy, puis Vanderpol en 1932, ont établi que ce calcul symbolique pouvait se déduire des propriétés de la transformation de Laplace, et Laurent Schwartz a inventé les distributions notamment pour fonder rigoureusement cette théorie : la "dérivée" de la fonction de Heaviside est la mesure de Dirac.

____