

## Feuille 7 de TD. Analyse complexe (I)

1.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :  $(1 + i)^{10}$ ,  $-1 + i\sqrt{3}$ ,  $10$ .
2. Décrire les ensembles  $\{z \in \mathbb{C}; |z - \bar{z}| = 2\}$ ,  $\{z \in \mathbb{C}; |z - 2| = 1\}$ ,  $\left\{z + \frac{1}{z}; |z| = 1\right\}$ .
3. Donner l'expression de la rotation de centre 1 et d'angle  $\pi/4$ .

2. Quelles sont les fonctions holomorphes parmi :  $\sin z$ ,  $\frac{1}{z}$ ,  $\frac{x}{x^2 + y^2}$  ?

3.

1. Si  $f$  est holomorphe sur  $U$  et  $\gamma \subset U$  est un lacet, montrer que  $\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$ .
2. Montrer que si  $f$  est holomorphe sur  $U$  et si  $\exp(f) = \text{Id}$ , alors  $f'(z) = \frac{1}{z}$ .
3. Peut-on avoir  $U = \mathbb{C}$  dans la question précédente ?
4. Prendre comme lacet le cercle unité et montrer qu'on ne peut pas avoir non plus  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

4. Calculer

1.  $\int_0^1 z dz$ .
2.  $\int_{\mathcal{C}} z^n dz$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\mathcal{C}$  le cercle unité.
3.  $\int_{\mathcal{C}} e^{z^3} e^{-z^2} dz$ .