Feuille 8 de TD. Analyse complexe (II)

1. Résoudre les équations suivantes :

$$e^z = -3,\ \cos z = 2,\ \sin z = 2, \tan z = 2\imath,\ \mathrm{ch}\, z = 1/2.$$

2.

1. Montrer que
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$$
et
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y.$$
En déduire les zéros de sin et cos.
2. Montrer la formule
$$\sin z - \sin w = 2\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)\cos\left(\frac{z+w}{2}\right).$$
3. Montrer que la fonction sin est injective sur U, où $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |x| < \pi/2\}$. Notons arcsin sa réciproque.
4. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de arcsin en 0.

3. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} e^z\, dz,\ \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \sin\theta)\, d\theta.$
2. $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{z}\, dz$, avec successivement : $f(z) = \cos z$, $f(z) = \sin z$, $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z+2}$.

4.

1. Si λ est un nombre réel non nul tel que $|\lambda| \neq 1$, calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \frac{z^n}{(z-\lambda)(z-\lambda^{-1})}\, dz$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1}\, d\theta$.

5. Montrer que le nombre $\int_0^{2\pi} e^{r\,e^{\imath\theta}}\,d\theta$ ne dépend pas de $r > 0$. En déduire sa valeur. [Indication : comment montre-t-on qu'une fonction est constante ?]

6. Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, paramétrée dans le sens direct. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\int_{\mathscr{E}} \frac{dz}{z}$, obtenir la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$.

7. Développer en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence : $\sin z$, $\dfrac{1}{1-z}$, $\dfrac{1}{2-3z+z^2}$, $\dfrac{1}{1+z+z^2+z^3}$.