Feuille 9 de TD. Analyse complexe (III)

1. En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions $z \mapsto z^{1/2}$, $z \mapsto (1-z)^{1/3}$, $z \mapsto ((1-2\imath)z)^{2\imath/5}$. Donner leurs domaines de définition.

2. On pose $f(z) = e^{-z^2/2} \displaystyle\int_0^z e^{w^2/2}\, dw$, $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que f est holomorphe.
2. Calculer $f(0)$ et $f'(z) + z f(z)$.
3. À partir de la formule de $f'(z) + z f(z)$, déterminer le développement en série entière de f.

3. Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes dans les domaines indiqués :

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, dans $\{z\,;\, 0 < |z| < 1\}$, dans $\{z\,;\, 1 < |z| < 2\}$ et dans $\{z\,;\, |z| > 2\}$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-a)}$, avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dans $\{z\,;\, 0 < |z| < |a|\}$ et dans $\{z\,;\, |z| > |a|\}$.

4. Donner les résidus des fonctions suivantes dans leurs points singuliers.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$.
2. $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$.
3. $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$.