Contrôle continu # 1

– le 12 octobre 2016. Durée 45 minutes. Documents et calculatrices interdits –

Exercice 1. (4 p.) Simplifier l'expression :

$$dx \wedge dz \wedge dy + 3\,dz \wedge dy \wedge dx - dy \wedge dz \wedge dx + 5\,dx \wedge dx \wedge dx - 7\,dz \wedge dz \wedge dy.$$

Exercice 2. (8 p.) Soit $\mathscr{C}$ le carré (union de quatre segments) de sommets $A\,(1,0)$, $B\,(0,1)$, $D\,(-1,0)$, $E\,(0,-1)$, paramétré dans le sens $A \to B \to D \to E \to A$. Calculer l'intégrale $\int_{\mathscr{C}} \omega$, où $\omega = (x+y)\,(dx - dy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

Indication : Vous pouvez calculer l'intégrale directement ou – plus simplement – en utilisant la formule de Green-Rieman.

Bonus. (3 p.) Quelle est la valeur de $\int_{\mathscr{C}} *\omega$?

Exercice 3. (8 p.) Soit $\beta \in \Omega^3(\mathbb{R}^6)$ la 3-forme sur $\mathbb{R}^6$ donneé par la formule

$$\beta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \cos(x_3)\,dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_6.$$

1. **(2 p.)** Calculer $d\,\beta$.
2. **(2 p.)** Déterminer $\beta \wedge \beta$.
3. **(4 p.)** Soit $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, (u,v,w) \mapsto (uw, uw-1, \exp(v), w^3, uw, vw)$. Déterminer $\Phi^\sharp\beta \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$.

Remarque pour la question 3. *:* Les coordonnées dans $\mathbb{R}^6$ sont $(x_1, \ldots, x_6)$, celles dans $\mathbb{R}^3$ sont (u,v,w). Ainsi on a, par exemple, $\Phi^\sharp(x_1) = uw$, $\Phi^\sharp(x_2) = uw - 1$, etc.