Feuille d'exercices n° 2
CONVEXITÉ. OPTIMISATION

<u>Exercice 1.</u> Rappel sur la dimension 1

1. Trouver pour quelles domains de valeurs de x les les fonctions suivantes sont convexes :

$$\text{a)}\quad f_1(x) = \tfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1 \qquad \text{b)}\quad f_2(x) = \sin x, \qquad \text{c)}\quad f_3(x) = e^{2x},$$
$$\text{d)}\quad f_4(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad \text{e)}\quad f_5(x) = x^2 \ln(x), \qquad \text{f)}\quad f_6(x) = (x^3)^x.$$

- Sont-elles coercives ?

2. Trouver le minimum absolu ou le maximum absolu des fonctions suivantes

$$\text{a)}\quad g_1(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ où } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \qquad \text{b)}\quad g_2(x) = e^{x^2}, \text{ où } x \in \mathbb{R} \qquad \text{c)}\quad g_3(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice 2.</u>

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

2. **Logarithme**
   (a) Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
   (b) En déduire que $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \cdot \ln b}$
3. En utilisant la propriété des fonctions convexes :

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a),\ \forall x, a \in C$$

montrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x (on peut prendre $a = 0$).

<u>Exercice 3.</u> Rappel sur les matrices 2×2
On considère les matrices

$$\text{a.}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b.}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c.}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{d.}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e.}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{f.}\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les valeurs propres de ses matrices.
2. Pour chaque matrice écrire une forme bilineaire correspondante. Lesquelles parmis ses formes bilineaires corespondent aux formes quadratiques ?
3. Quelles matrices peuvent être des matrices Hessiennes des fonctions ?
4. A-t-on les formes quadratiques convexes ici ?
5. Étudier les extrema des formes quadratiques correspondantes.

<u>Exercice 4.</u> Convexité et dérivés partielles
Pour les fonctions suivantes calculer leur matrices Hessiennes, les valeurs propres de ses matrices et détérminer si ses fonctions sont convexes sur leur domaine de définition :

$$\text{a)}\quad f_1(x,y) = x^2 + y^3 \qquad \text{b)}\quad f_2(x,y) = x^2 + y^2 - xy, \qquad \text{c)}\quad f_3(x,y) = e^{xy}$$

Exercice 5. Coercive ?
Déterminer si les fonctions suivantes sont coercive sur leur domaine de définition.
a. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; **b.** $g(x,y) = x^2+y^2-ax-by-c$ pour $a,b,c \in \mathbb{R}^3$;
c. $f(x,y) = x^2-y^2$; **d.** $f(x,y) = x^2+5$. Lesquelles parmis ces fonctions ont un minimum absolu ?

Exercice 6.
Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, et $a \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction f présente en a

— un maximum local s'il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall u \in A,\ \|u-a\| \leq r \implies f(u) \leq f(a)$.

— un minimum local s'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall u \in A,\ \|u-a\| \leq r \implies f(u) \geq f(a)$.

— un extrémum local si elle présente en a un maximum local ou un minimum local.

On suppose dans la suite que f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et soit $a \in U$.

1. Montrer que si f présente un extremum en a, alors les dérivées partielles de f en a sont nulles. Un tel point (où les dérivées partielles s'annulent) est appelé point critique de f.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$. Montrer que f admet $(1,2)$ pour seul point critique. En effectuant le changement d'origine $x = 1+X$ et $y = 2+Y$ et en calculant $f(1+X, 2+Y)$, prouver que f admet un minimum local en $(1,2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3+y^3-6(x^2-y^2)$.
   (a) Montrer que f possède 4 points critiques.
   (b) En calculant $f(t,0)$ et $f(0,t)$, prouver que f n'admet pas d'extrémum en $(0,0)$, bien que ce point soit un point critique.
   (c) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(4,0)$. En déduire que f admet un minimum local en $(4,0)$.
   (d) En s'aidant des questions précédentes, faire l'étude locale aux autres points critiques.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{4}$;
2. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$;
3. $f(x,y) = x^4+y^4-4(x-y)^2$.

Indication. Il s'agit d'une application assez immédiate des résultats du cours. On cherche les points critiques, puis on étudie la nature de ces points critiques.

Exercice 8. Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^3+6xy-3y^2+2$;
2. $f(x,y) = y\big(x^2+(\ln y)^2\big)$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4+y^4-4xy$;

Indication. La recherche des extrema locaux se fait suivant la méthode habituelle. Pour étudier l'existence d'un extremum global, on pourra étudier $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ et démontrer que ceci garde un signe constant, ou bien étudier le comportement de f aux bord de l'ensemble de définition.

Exercice 9. Dégénérés...
Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes. Est-ce que ce sont des extrema globaux ? $f(x,y) = x^2+y^3$; $g(x,y) = x^4+y^3-3y-2$; $h(x,y) = x^3+xy^2-x^2y-y^3$.

Exercice 10. Extrema sous contrainte
Soit $f(x,y) = y^2-x^2y+x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2-1 \leq y \leq 1-x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ. En déduire le minimum et le maximum de f sur D.

Exercice 11. **Page 65 du poly**

1. Montrer que la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ est coercive sur $\mathbb{R}^2$.
2. On se place sur une partie du plan D définie par l'inégalité $y \geq \sqrt{2}x^2$. Montrer que le minimum de la fonction f sur D est égale à $-\frac{5}{8}$.

Exercice 12. **Extrema sur un compact**

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.

1. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$;
2. $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0, 1] \times [0, 1]$;
3. $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ et $K = [0, \pi/2]^2$.

Exercice 13. **Volume et surface d'une boite**,

On désire fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0,5m^3$ et pour optimiser la quantité de mâtière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite.

Indication. Notons x, y, z les trois dimensions. On doit minimiser une fonction de trois variables en x, y et z, sous la contrainte de $xyz = 0,5$. On peut donc remplacer z par son expression en fonction de x et de y, et rechercher le minimum d'une fonction de deux variables.

Exercices de contrôle

Exercice 14. En utilisant la propriété des fonctions concaves :

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a),\ \forall x, a \in C$$

montrer que $\ln x \geq x - 1$ pour tout réel positif x. (On peut prendre $a = 1$.)

Exercice 15.

Pour les fonctions suivantes calculer leur matrices Hessiennes, les valeurs propres de ses matrices et détérminer si ses fonctions sont convexes sur leur domaine de définition :

a) $f_1(x, y) = x^3 + y^2$ b) $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + \cos y + 1}$, c) $f_3(x, y) = \ln(x^2 y^2)$

Sont-elles coercives ?

Exercice 16. Calculer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Ecrire la forme quadratique correspondante et trouver ses extrema.

Exercice 17. On considère une fonction de deux variables

$$f : (x, y) \mapsto 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$$

1. Est-ce que la fonction $f(x, y)$ est coercive sur $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f possède-t-elle un maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$? un minimum absolu ?
4. Representer le domain $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x \leq 0)$ et $(y \leq 0)$ et $(x + y + 1 \geq 0\}$. Montrer que la restriction de f à T admet le minimum et le maximum absolus que l'on calculera.