Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Maths 5 Cours : P. Mironescu, TD : O. Kravchenko

Feuille d'exercices n^o 10
TRANSFORMÉES DE FOURIER

<u>Exercice 1.</u>
Établir les égalités suivantes :

1. $F(f * g)(u) = F(f)(u)F(g)(u)$
2. $F(\overline{f})(u) = \overline{F(f)(-u)}$
3. $F(f(x-a))(u) = e^{-i2\pi au}F(f)(u)$
4. $F^{-1}(f(u-u_0))(x) = e^{i2\pi au_0}(f)(x)$
5. $F(f(ax))(u) = \frac{1}{|a|}F(f)(\frac{u}{a})$
6. $F(f')(u) = 2i\pi uF(f)(u)$
7. $F(-2\pi xf)(u) = \frac{dF(f)(u)}{du}$

<u>Exercice 2.</u>
Soit Ω un nombre réel positif, habituellement 1 ou 2π.

1. Soit f une fonction inégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $F_\Omega(f)$ sa transformée de Fourier. Montrer que :
   (a) si f est paire, alors
   $$F_\Omega(f)(x) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\Omega xt)\mathrm{d}t$$
   (b) si f est impaire, alors
   $$F_\Omega(f)(x) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\Omega xt)\mathrm{d}t$$
2. Utiliser ce résultat pour trouver les transformées de Fourier de la fonction "porte" de largeur $2a$ définit par
   $$P_a(t) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(t),$$
   et la fonction "triangle" Δ_a définit par
   $$\Delta_a(t) = \left(1 - \frac{|t|}{a}\right)\mathbf{1}_{[-a,a]}(t)$$
   pour $a > 0$.
3. Calculer $I(\omega) = \int_0^\infty f(t)\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos(\omega x)\mathrm{d}x$

<u>Exercice 3.</u>
Calculer les coefficients de Fourier de la fonction périodique f, définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \pi - |x|, \quad |x| \le \pi.$$

Etudier la convergence de la série de Fourier qui en résulte ; est-elle absolue ou peut-être uniforme ? En déduire la valeur de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4.

1. Trouver les coefficients de Fourier en sin et cos de la fonction périodique F, donnée sur $]-5,5[\setminus\{0\}$ par
$$F(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}.$$
2. Vérifier que F satisfait aux conditions de Dirichlet. Comment doit F être définie en $x = -5, 0, 5$ pour que sa série de Fourier converge vers $F(x)$ pour tout $x \in [-5, 5]$?

Exercice 5.

Développer la fonction périodique F, donnée sur $]-2, 2[$ par $F(x) = x$ (fonction en dents de scie), en série trigonométrique.

Exercice 6.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte symétrique
$$f(x) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < x < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}.$$
2. Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet. Comment doit f être définie en $x = \pm\frac{\tau}{2}$ pour que l'intégrale de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout x ?

Exercice 7.

1. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour évaluer
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\lambda \cos b\lambda}{\lambda} d\lambda.$$
2. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$.

Exercice 8.

1. Trouver la transformée de Fourier en cosinus de $f(x) = e^{-m|x|},\ m > 0$.
2. Utiliser le résultat de (1) pour montrer que, pour $p > 0,\ \beta > 0$,
$$\int_0^\infty \frac{\cos pv}{v^2 + \beta^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}.$$

Exercice 9.

Trouver une fonction f de sorte que l'équation intégrale suivante soit vérifiée :
$$\int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx = \begin{cases} 1 - \alpha, & 0 \le \alpha \le 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 10.

Montrer que, pour $x \ge 0$,
$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

Exercice 11.

Evaluer

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$,
2. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$, en appliquant l'identité de Parseval.