Feuille d'exercices n° 5
Intégrales curvilignes

Exercice 1.
Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ définie par
$\gamma(t) := \left(-\frac{4}{3}t^3 + t - 2, 2t^2 + 7\right)$.

Exercice 2. Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par
$\gamma(t) := (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$.

Exercice 3. Pour $x \in [0, 1]$, calculer la longueur de la courbe $y := x^{3/2}$.

Exercice 4. Soit Γ une courbe paramétrée par $\varrho := \varrho(t)$ et $\theta := \theta(t)$ en coordonnées polaires, où $t \in [a; b]$.

1. Montrer que la longueur de Γ est
$$\int_a^b \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2\theta'^2}\mathrm{d}t.$$
2. Soit γ la courbe d'équation polaire $\varrho := 2(1 + \cos\theta)$ pour θ dans $[-\pi; \pi]$. Donner une paramétrisation en coordonnées polaires de cette courbe et calculer sa longueur.

Exercice 5. Pour $r > 0$, soit Γ_r la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = r^2$.

1. Quelle est la nature de Γ_r ? Donner une paramétrisation.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) := x^3 + xy^2$. Donner la valeur de f en un point de la courbe.
3. La fonction f a-t-elle un maximum et un minimum sur la courbe ? Si oui, calculer chacun en fonction de r.
4. Soit E la partie du plan d'équation $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} \leq 1$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de f sur E ?

Exercice 6.

1. Paramétrer la courbe d'équation $9x^2 + 4y^2 - 8y = 32$.
2. Montrer que le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient à la courbe et trouver le vecteur tangent en ce point.
3. Trouver le maximum et le minimum sur la courbe de la fonction $f(x, y) := x^2 - (y - 1)^2$.

Exercice 7. Soit $\gamma(t) := (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t),\ t \in [0, \pi]$ une représentation paramétrique d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la valeur absolue du vecteur tangent ne dépend pas de t.
2. Écrire l'équation de la droite tangente au point $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 2\right)$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec le plan yz.

Exercice 8.
Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \ln(x+y+z)\mathrm{d}s$ où Γ est le segment de droite joignant le point $(1,1,1)$ au point $(2,3,4)$.

Exercice 9.

1. Écrire une équation de la droite D passant par les points $(1,1)$ et $(2,4)$.
2. Calculer la valeur de l'intégrale
$$\int_C (y-x)\mathrm{d}x + (y+x)\mathrm{d}y,$$
où C est un segment de la droite D entre les points $(1,1)$ et $(2,4)$.

Exercice 10. Calculer l'intégrale curviligne
$$\int_{C^+} \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
où C^+ est le cercle de centre O et de rayon R décrit complètement dans le sens direct.

Exercice 11. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma z^3\mathrm{d}s$ où Γ est la courbe paramétrée par $x := t^3+3t$, $y := t^3-3t$ et $z := 3t$.

Exercice 12. Calculer l'intégrale curviligne
$$\int_\Gamma (x-y^2)\mathrm{d}x - (x+y^2)\mathrm{d}y$$
où Γ est le quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 parcouru du point $(1,0)$ au point $(0,1)$.

Exercice 13. Calculer l'intégrale curviligne
$$\int_\Gamma (x-y^3)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$$
où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Exercice 14. Calculer l'intégrale curviligne
$$\int_C xy\mathrm{d}y$$
où C est l'arc de cercle défini par $x := \cos t$ et $y := \sin t$, t variant de 0 à π.

Exercice 15. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma x^5\mathrm{d}s$ où Γ est l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et d'extrémités $(1,1)$ et $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Exercice 16. Montrer que la circulation du champ de gradient ∇f, où $f(x,y) = x^2y^3$ le long du segment de droite allant du point $(7,1)$ au point $(5,2)$ est égale à 151.