Feuille d'exercices n° 3
CHANGEMENT DE VARIABLES. INTÉGRALES MULTIPLES

Exercice 1.
Trouver la dérivée par rapport à t de

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t,\ y = \cos t$;
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ où $x = e^{-t},\ y = e^t$.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $g(u,v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v})$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que la matrice jacobienne de f au point $a = (1,1,1)$ est donnée par $Df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $Dg(b)$ pour $b = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

1. Soit $F : (x,y) \to F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.
   (a) Calculer le laplacien de f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
   (b) Déterminer toutes les applications f telles que $\Delta f = r$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. Soit $h : (x,y) \mapsto h(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f.
3. On pose $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R} \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$ et $g = f \circ \phi$. Exprimer le laplacien de g en coordonnées polaires (r,θ).

Exercice 4.
Soit D le domaine : $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\right\}$. Calculer $\displaystyle\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants : a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad$ $b)$ $f(x,y) = xy(x+y)$.

Exercice 5.
Calculer les intégrales suivantes $I = \displaystyle\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ et $I = \displaystyle\iiint_D z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
où $D = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 | y^2 + z \leq 1, x^2 + z \leq 1\right\}$.

Exercice 6. Calculer l'aire du domaine D suivant :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 4 - x^3\right\}.$$

Exercice 7.
a) Calculer $\displaystyle\int\int_D (x-y)\ dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x.$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par : $u = x + y,\ v = x - y$.

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes en passant en coordonnées polaires.

1. $I = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$
2. $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-2x\leq 0\right\}$
   (*On pourra montrer que D est un disque*).

Exercice 9.

Calculer

$$\iint_\Delta (x^3-2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{avec} \quad \Delta = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}.$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = au\cos\theta$ et $y = bu\sin\theta$.

Exercice 10.

En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$ avec a , $b>0$; $f(x,y) = x^2+y^2$.

Exercice 11.

1. **Théorème de Guldin** Soit D_0 un domaine tracé dans le demi-plan $H = \{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0\}$. Si l'on fait tourner D_0 autour de l'axe Oz, on obtient un domaine D de $\mathbb{R}^3$. En utilisant les coordonnées cylindriques, montrer que $Vol\,(D) = 2\pi Aire\,(D_0)\cdot x_G$, où (x_G, z_G) sont les coordonnées du centre d'inertie du domaine D_0.
2. Calculer les volumes des domaines suivants :
   (a) le tore obtenu en faisant tourner autour de Oz le domaine
   $D_0 = \{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 | \dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leq 1\}$, où $a<c$;
   (b) $D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4R^2\,,\ x^2+y^2\leq R^2\right\}$, où $R>0$.

Exercices de contrôle

Exercice 12. Soit $z(x) = f(x,y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et y une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Trouver une expression pour $z'(x)$. Appliquer la formule aux cas particuliers

1. $f(x,y) = x^2+2xy+4y^2$ et $y = e^{3x}$.
2. $f(x,y) = xy^2+x^2y$ et $y = \ln x$.

Exercice 13. Soit D le quart de disque unité défini par : $D = \{(x,y)|\ \ 0\leq x,\ 0\leq y,\ x^2+y^2\leq 1\}$. Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int\int_D (4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Exercice 14. Soit $I = \displaystyle\iint_{T_a} \sqrt{xy}\,e^{-x-y}\,dxdy$ avec $T_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x\geq 0; y\geq 0; x+y\leq a\}$ et $a>0$.

A l'aide du changement de variables $\left\{\begin{array}{l} x = tu \\ y = (1-t)u \end{array}\right.$ calculer I.

Exercice 15.

En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1\,,\ 0\leq z\leq h\}$ avec $h>0$; $f(x,y,z) = z$;
2. $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\geq 0\,,\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$; $f(x,y,z) = xyz$.