Feuille d'exercices n° 6
INTÉGRALE DE SURFACES

Rappel. *Tangente et plan normale à une surface.*
L'équation du plan tangent à la surface $F(x, y, z) = 0$ au point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ est

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

et les équations de la normale sont

$$\frac{x - x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F/\partial z}$$

Exercice 1. Trouver les équations du plan tangent et de la normale à la surface donnée au point indiqué :

1. surface $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$, au point $(2, 1, 3)$;
2. surface $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$, au point $(1, -2, 1)$.

Exercice 2. Montrer que les surfaces définies par les équations $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ sont tangentes au point $(2, 1, 1)$.

Exercice 3. Montrer que les surfaces définies par les équations $xy + yz - 4zx = 0$ et $3z^2 - 5x + y = 0$ se coupe en angle droit au point $(1, 2, 1)$.

Rappel 1 : *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une fonction à valeurs réelles et S une surface donnée par une fonction vectorielle $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k},$$

avec les coordonnées (u, v) qui parcourent $D(u, v)$, le domaine de définition de la fonction r dans le plan R^2. La fonction $f(x, y, z)$ est considerée seulement dans les points de la surface S, à savoir,

$$f[\mathbf{r}(u, v)] = f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)].$$

L'intégrale de surface d'une fonction $f(x, y, z)$ sur la surface S est définie comme suit :

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{D(u,v)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

où les derivées partielles $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ sont

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\,\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\,\mathbf{k}.$$

On considère le produit vectoriel $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Le vecteur $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ est orthogonal à la surface dans le point $\mathbf{r}(u, v)$.
La valeur absolue $dS = \left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$ est appelé élément de surface.
L'aire d'une surface S est donné par une intégrale de surface $A = \iint_S dS$.
Si la surface est donnée par une équation $z = z(x, y)$, où $z(x, y)$ est une fonction C^1 sur un domaine $D(x, y)$, l'intégrale de surface est donnée par

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{D(x,y)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx dy.$$

Exercice 4. Calculer l'intégrale $\iint\limits_S (x+y+z)\, dS$, où S est une partie du plan $x+2y+4z=4$, telle que $(x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0)$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale $\iint\limits_S z^2 dS$, où S est une surface d'un cône $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$.

Exercice 6. Soit S la surface paramétrée par l'application :

$$f : (u,v) \in X \mapsto (u, v, uv),$$

où X est le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner grossièrement S.
2. Donner sous forme d'une intégrale sur X l'aire de la surface de S.
3. En utilisant les coordonnées polaires, calculer cette intégrale.

Exercice 7. Calculer l'intégrale $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\, dS$, où S est une partie d'un cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ satisfaisant $x^2+y^2 \leq 2ax$.

Exercice 8. Trouver l'intégrale $\iint\limits_S x dS$, où la surface S est une partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$, telle que $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

Exercice 9. Soit C une courbe fermée plane paramétrée par $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Soit $X \in \mathbb{R}^3$, et S la surface paramétrée par :

$$F : (u,v) \in [0,1] \times [0,1],\ F(u,v) = f(u) + vX.$$

1. Représenter S.
2. Calculer le volume du cylindre délimité par S en fonction de l'aire délimitée par la courbe C et des coordonnées de X.
3. Dans le cas où X est un vecteur vertical, calculer l'aire de S en fonction de la longueur de C.

Rappel 2 : *Soit S une surface. Soit $\mathbf{n}(x,y,z)$ le vecteur normale unitaire en point (x,y,z) de S. Le choix de*

$$\mathbf{n}(x,y,z) \quad ou \quad -\mathbf{n}(x,y,z).$$

est appellé l'orientation de S. Si S est un bord d'une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ en chaque point il y a deux vecteurs normales opposés : exterieur et interieur. Si la surface est orientée par la normale exterieurealors

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} dS = \iint\limits_{D(u,v)} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right] dudv;$$

Sinon, si elle orientée par la normale intérieure :

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} dS = \iint\limits_{D(u,v)} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right] dudv.$$

La quantité $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ est appelée l'élément vectoriel de la surface. Le point $\cdot$ signifie le produit scalaire.

Si la surface S est donnée par une équation $z = z(x,y)$, où $z(x,y)$ où z est une fonction C^1 sur $D(x,y)$, alors l'intégrale de $\mathbf{F}$ sur S est donnée par une des formules suivantes. Si S est oriénté par la normale exterieure (la composante de k est positive), alors

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot \mathbf{n}dS = \iint\limits_{D(x,y)} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dxdy;$$

Si S est oriénté par la normale intérieure (la composante de k est négative), alors

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot \mathbf{n}dS = \iint\limits_{D(x,y)} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)dxdy.$$

En coordonnées cela se resume comme suit. Si $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ soit la normale à la surface S : $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ alors le produit scalaire $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ est égale à

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{F}(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\cdot\mathbf{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma.$$

L'intégrale de surface alors

$$\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

Puisque $\cos\alpha\cdot dS = dydz$ et aussi $\cos\beta\cdot dS = dzdx$, $\cos\gamma\cdot dS = dxdy$, on a la formule suivante :

$$\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Si la surface S est donné par $\mathbf{r}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, la dernière formule devient alors

$$\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{D(u,v)} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv,$$

où $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Calculer l'intégrale du champs $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,-1,z)$ sur l'intérieur de la surface S, donnée par l'équation $z = x\cos y$, où $0 \le x \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{3}$.

Exercice 11. Trouver l'intégrale $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,x,z)$ sur la surface S, donnée par
$\mathbf{r}(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$, $0 \le u \le 2$, $\frac{\pi}{2} \le v \le \pi$.

Exercice 12. Trouver le flux du champs de vecteurs $\mathbf{F} = y\cdot\mathbf{i} - x\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$ à travers de la surface conique exterieure $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$.

Exercice 13. Trouver le flux du champs de vecteurs
$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\cdot\mathbf{i} + x\cdot\mathbf{j} - z\cdot\mathbf{k}$ à travers de la sphère unitaire orientée à l'interieur $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Exercice 14. Calculer l'intégrale $\iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$, où S est une partie interieure de l'ellipsoïde, donnée paramétriquement comme suit $\mathbf{r}(u,v) = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$. Les paramètres u, v changes dans les intervales $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.