Feuille d'exercices n° 11
TRANSFORMÉES DE LAPLACE

On note la fonction de Heaviside :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Exercice 1. Transformée de Laplace
Calculer la transformé de Laplace de

a. $f_1(t) = H(t)t^n$, **b.** $f_2(t) = H(t)\cos \omega t$, **c.** $f_3(t) = H(t)\sin \omega t$,

d. $f_4(t) = (H(t) - H(t-2))(t^3 - 3t^2 + 2t)$, **e.** $f_5(t) = e^{-4t}\sin(5t)$, **f.** $f_6(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin t & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \\ 1 & \text{si } t \geq \pi/2 \end{cases}$

Exercice 2. Originaux
Déterminer les originaux des fonctions

a. $F_1(s) = \dfrac{1}{(s+\pi)^7}$, **b.**$F_2\ (s) = \dfrac{e^{-s}}{(s+\pi)^7}$, **c.** $F_3(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$ **c.** $F_4(s) = e^{-\pi s}\dfrac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}$.

Exercice 3. Équations différentielles

1. Pour $t \geq 0$, résoudre une équation :

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -8e^{-t} \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 12. \end{cases}$$

2. Calucler les transformée de Laplace des fonctions

$$f(t) = [H(t) - H(t-\pi]\sin t \text{ et } g(t) = [H(t) - H(t-\pi]\cos t.$$

Puis resoudre en termes des fonctions causales le système différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) = & -y(t) + f(t) \\ y'(t) = & x(t) + g(t) \\ x(0_+) = & y(0_+) = 1 \end{cases}$$

3. L'intensité qui traverse un circuit RLC vérifie une équation suivante :

$$Li'(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Déterminer $i(t)$ lorsque $C = 1/225F,\ R = 50\Omega,\ L = 1H$, sachant que il n'y a pas de courant initial dans le circuit et que ce dernier est relié à une source de courant alternative qui delivre (en volts : $E(t) = 100\cos 2t$.

Remarque. Il s'agit d'une équation intégro-différentielle. La transformation de laplace s'applique sans problème.