Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Maths 5 Cours : P. Mironescu, TD : O. Kravchenko

Feuille d'exercices n° 9

Optimisation : extrema sous contraintes

Exercice 1. Parmi des rectangles dont la somme des côtés vaut $2p$ (où p est un nombre positif donné), trouver un rectangle à l'aire maximale.

Exercice 2. Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné ? Le déterminer par une méthode géométrique.

Exercice 3. *Multiplicateurs de Lagrange - Question théorique*
La fonction f est définie par $f(x,y) := x^2 + y^2$ et la contrainte est la courbe C, définie par une équation $g(x,y) = 0$.

1. La ligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ est une courbe $f(x,y) = k$. Faire un dessin des lignes de niveau de f.
2. Dessiner une courbe quelconque C. Marquer les points avec les valeurs de f les plus petites et les plus grandes sur la courbe C. Dessiner des lignes de niveau passant par ces points.
3. Expliquer géometriquement comment trouver un minimum et un maximum de f, lié par cette relation $g(x,y) = 0$.
4. Constater que les gradients de f et de g doivent être alignés dans un point d'extremum sur une courbe en remarquant que la ligne de niveau de f doit être tangente à la courbe C dans ce point.
5. Expliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 4.
Trouver le point de la courbe $y = x^2$ qui est le plus près du point $(0,h)$.

Exercice 5. Déterminer parmi les baignoires parallélépipédique ayant un volume V donné celles dont la surface intérieure est minimale.

Exercice 6. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction ye^x sur l'ensemble $E = \{(x,y),\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Exercice 7.
Trouver les extrema globaux de $f(x,y) := y + y^2 - x^2 + 3$ sur $B(0,1)$, disque de centre $(0,0)$ de rayon 1.

Exercice 8.
Sur la courbe $y = x^2,\ x \in]-\infty, \infty[$, trouver le point le plus proche du point $(0,b)$, où b est un nombre réel fixé.

Exercice 9.
Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & 3xy - 3x^2 - y^3 \end{array}.$$

1. Étudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $P := [-1,1] \times [-1,1]$. Déterminer les extrema absolus (globaux) de la restriction de f à l'ensemble P.

Exercice 10.
Soit
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 4xy - x^4 - y^4 \end{array}.$$
1. Étudier les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $P := [0,8] \times [0,8]$. Déterminer les extrema absolus de la restriction de f à l'ensemble P.

Exercice 11.
Soit
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2)(x+y) - 3xy - 9 \end{array}.$$
1. Étudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit D le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 4.
(i) Justifier que la restriction de f à D admet son maximum absolu (global) sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 4.
(ii) Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui permet de calculer le maximum absolu de la restriction de f à D.

Exercice 12.
Soit
$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 - xy + y^2 + x + y$$
où
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}.$$
Représenter graphiquement l'ensemble D et déterminer les extrema globaux de f sur D.

Exercice 13.

1. Soit $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 + 9x^2 = 1\}$. Quelle est la nature de l'ensemble E ? Dessiner E.
2. On veut trouver, sur l'ensemble E, le maximum et le minimum de $f(x,y) := 4y^2 - 3x^2$. Justifier que ce maximum et ce minimum existent.
3. Pour cela on pose $g(x,y) := 4y^2 + 9x^2 - 1$. Calculer le gradient de f et le gradient de g.
4. Poursuivre le raisonnement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 14.
Soient $f(x,y) := xy$ et $g(x,y) := x + 4y - 16$ deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Maximiser la fonction $f(x,y)$, sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Exercice 15. (Feuille 2)
Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ. En déduire le minimum et le maximum de f sur D.