Cours du 9 novembre

– Optimisation –

Problème général : $\min_{v \in \mathcal{V}} f(v)$, avec $v = (x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. On considère un $\mathcal{V}$ de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^n\,;\, & g^1(v) \leq 0,\ g^2(v) \leq 0, \dots,\ g^l(v) \leq 0, \\ & h^1(v) = 0, \dots, h^p(v) = 0,\ k^1(v) < 0, \dots, k^r(v) < 0\}. \end{aligned}$$

[Des exemples vus avant montrent que ces conditions apparaissent naturellement.]

Théorème des multiplicateurs de Karush–Kuhn–Tucker. *(Théorème KKT)* Si v est une solution du problème, et si $f, g^1, \dots, h^r$ sont lisses (C^1 suffit), alors : il existe $\lambda^0, \dots, \lambda^l$, $\mu^1, \dots, \mu^p$ (des « multiplicateurs ») tels que :

1. $\lambda^0\, \vec{\nabla} f(v) + \lambda^1\, \vec{\nabla} g^1(v) + \cdots + \lambda^l\, \vec{\nabla} g^l(v) + \mu^1\, \vec{\nabla} h^1(v) + \cdots + \mu^p\, \vec{\nabla} h^p(v) = 0\,;$
2. Au moins un multiplicateur est non nul ;
3. $\lambda^j \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, l\,;$
4. $\lambda^j\, g^j(v) = 0$, $j = 1, \dots, l$.

Remarque 1. Concrètement, on essaie de montrer que $\lambda^0 \neq 0$, et dans ce cas on peut supposer que $\lambda^0 = 1$.

Remarque 2. Ce théorème ne dit rien sur l'existence de v. Pour l'existence, on a deux résultats utiles : le minimum est atteint si

1. f est continue et $\mathcal{V}$ est compact (donc en particulier si $r = 0$ et $\mathcal{V}$ est borné).
2. f est coercive et $\mathcal{V}$ est fermé.

Suggestions pour les séances de TD à venir :

1. Énoncer les deux résultats de la Remarque 2 qui assurent l'existence du minimum, et faire quelques exercices d'application.
2. Plusieurs exercices sur les multiplicateurs.
3. Nature locale des points critiques pour des problèmes sans contrainte (avec les signes des valeurs propres de la Hessienne).