Feuille d'exercices n° 1
Formes différentielles. Théorème de Green-Riemann

Formes différentielles

Exercice 1.
Simplifier :

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 5\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x - 7\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y.$$

Exercice 2.
Donner la formule pour d, l'opérateur de de Rham (différentielle extérieure) en dimension 3 et calculer $\mathrm{d}\omega$ où :

$$\omega := x^2 y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + (y + x + 2z)\mathrm{d}z$$

et $\mathrm{d}\alpha$ où :

$$\alpha := x^2 y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (y + x + 2z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Exercice 3.
Soit $\{\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n\}$ une base dans l'espace des formes différentielles $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Le produit exterieur a pour propriété $\omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega$ pour $\omega, \nu \in \Omega^1(\mathbb{R}^p)$. En déduire que $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. Existe-t-il une 1-forme $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\omega \wedge \omega \neq 0$?
3. Existe-t-il une 2-forme $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\alpha \wedge \alpha \neq 0$?

Exercice 4.
Déterminer si les formes suivantes dans $\mathbb{R}^2$ sont des formes différentielles exactes. Si c'est le cas trouver leur primitives.
a) $2(x + y)\mathrm{d}x + 2(x - 3y)\mathrm{d}y$, b) $\cos(x)\mathrm{d}x + \sin(y)\mathrm{d}y$, c) $(x - y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y$,
d) $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$, e) $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, f) $x^2 y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Exercice 5.
Resoudre l'équation différentielle $y' \cos x - y \sin x = 0$ en la voyant comme une équation sur une forme différentielle exacte : $\cos(x)\,\mathrm{d}y - y\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Puis resoudre $y' = (\tan x)y$.

Exercice 6.
Soit $p : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ une application qui envoie $(r, t) \mapsto (x, y)$: $x = r\cos t,\ y = r \sin t$. L'espace $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, de 1-formes dans $\mathbb{R}^2$, a pour base $B = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ et l'espace $\Omega^1(\mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[)$, de 1-formes dans $\mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[$, a pour base $B' = \{\mathrm{d}r, \mathrm{d}t\}$.

1. Exprimer la base B dans la base B'.
2. Quel est la base de $\Omega^2(\mathbb{R}^2)$, de 2-formes dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7.

Soit $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, dz\}$ une base dans $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$, l'espace des 1-formes differentielles de $\mathbb{R}^3$. Soit $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$, l'espace de 2-formes différentielles. On considère l'application $*$ de Hodge.

1. Calculer $*(\mathrm{d}x)$. Quelle est la valeur de $*(y\mathrm{d}x)$?
2. Déterminer $*(\mathrm{d}y)$ et $*(\mathrm{d}z)$. En déduire le dual de Hodge de $\omega := 3\sin(x)\mathrm{d}y - \cos(x)\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}x$.
3. Soit $\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$. Quelle est la forme $*\alpha$?
4. Caluler $**\,\mathrm{d}x$ pour $\mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ et, ensuite, pour $\mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 8.

Soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ avec P, Q, R des fonctions sur $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\mathrm{d}\omega$.
2. Calculer $*\omega$ et ensuite $*\mathrm{d} * \omega \equiv *(\mathrm{d}(*\omega))$ et aussi $*\mathrm{d}\omega$.
3. Comparer les expressions obtenues avec $\mathrm{rot}(v)$ et $\mathrm{div}(v)$ for a vector field $v = (P, Q, R)$ on $\mathbb{R}^3$.
4. Soient $v = (P, Q, R)$ et $\bar{v} = (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})$ deux champs des vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.
   Trouver une expression en forme différentielle pour le produit vectoriel entre eux.
5. Trouver similairement une expression pour le gradient d'une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et pour $\Delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, le laplacien de f.

Théorème de Green-Riemann

Soient D un domain de $\mathbb{R}^2$ compact et $C = \partial D$, le bord de D. Soit $P, Q : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1. Alors, la formule de Green-Riemann relie l'intégrale curviligne à l'intégrale double :

$$\oint\limits_C P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En particulier, si $Q = x$ et $P = -y$,

$$Aire(D) = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \oint\limits_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

On remarque aussi que la formule de Green-Riemann relie une 1-forme différentielle à sa différentielle - c'est une formule de Stokes :

$$\oint\limits_C \omega = \iint_D \mathrm{d}\omega, \text{ où } C = \partial D.$$

Cela se généralise en $\mathbb{R}^3$ en un lien de l'intégrale curviligne sur une courbe C avec l'intégrale de surface sur une surface S si la courbe C est le bord de la surface S : $C = \partial S$. En particulier, si $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ on a

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Soit ω une forme exacte, i.e. il existe une fonction f telle que $\omega = \mathrm{d}f$.
En particulier, si $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial f}{\partial z} = R$, par la formule de Stokes on a $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$. La consequence de ce resultat est que l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur un parcours C menant d'un point A au point B d'une forme exacte depend que de A et de B et ne depend pas de parcours choisi entre A et B. En effet,

$$\int_C \mathrm{d}f = f(B) - f(A).$$

Exercice 9.
Soit la courbe C un cercle donné par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$.
En utilisant la formule de Green-Riemann calculer les intégrales :
1. $\oint\limits_C xy\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$, **2.** $\oint\limits_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$, **3.** $\oint\limits_C x^2y\mathrm{d}x - xy^2\mathrm{d}y$.

Exercice 10.
Soit la courbe E un ellipse donné par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
En utilisant la formule de Green-Riemann calculer l'intégrale : $\oint\limits_E (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$.

Exercice 11.
Trouver l'aire de l'ellipse définie paramétriquement : $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Exercice 12.
Soit la courbe ∂T un triangle ABC de sommets $A\,(a,0)\,,\ B\,(a,a)\,,\ C\,(0,a)$ et T l'interieur de ce triangle. Soit $\omega = y^2\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y$. Calculer, séparément $\oint\limits_{\partial T}\omega$ et $\oint\limits_T \mathrm{d}\omega$ et vérifier l'accord (formule de Stokes).

Exercice 13.
Soit la courbe L un quart du cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2,\ x \ge 0$ et $y \ge 0$. En utilisant la formule de Green-Riemann ou Stokes calculer l'intégrale : $\oint\limits_L \left(y - x^2\right)\mathrm{d}x - \left(x + y^2\right)\mathrm{d}y$.

Exercice 14.
Soit la courbe Q un carré $A\,(1,0)\,,\ B\,(0,1)\,,\ D\,(-1,0)\,,\ E\,(0,-1)\,.$
En utilisant la formule de Green-Riemann calculer l'intégrale : $\oint\limits_Q (x+y)^3\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)\,.$

Exercice 15.
Soit R le domaine délimité par l'astroïde de l'équation $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. En utilisant la formule de Green-Riemann calculer son aire.

Exercice 16.
Soit $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \in \Omega^1(U)$ une 1-forme définiée sur l'ouvert $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Vérifier que $\mathrm{d}\omega = 0$. On appelle une telle 1-forme fermée.
2. Calculer $\oint_C \omega$ où C est un cercle unitaire paramétré comme suit :
   $\gamma(t) := (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi],\ x(t) := \cos t,\ y(t) := \sin t.$
3. Conclure que la forme ω n'est pas exacte, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $f \in C^\infty(U)$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$. Pourquoi est-ce que cela n'est pas en contradiction avec le lemme de Poincaré ?

Exercice 17.
Montrer que l'intégrale $\oint_L \dfrac{\partial(x^2y^3)}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial(x^2y^3)}{\partial y}\mathrm{d}y$, le long du segment de droite allant du point $(7,1)$ au point $(5,2)$ est égale à 151. Quelle est la valeur de la même intégrale si L est une partie d'une parabôle passant du point $(7,1)$ au point $(5,2)$.