**Feuille d'exercices n$^o$ 2**
COURBES, SURFACES, INTÉGRATION, STOKES

## Courbes et intégrales de courbes

**Exercice 1.**
Considerons la courbe $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (a\cos(2\pi t), a\sin(2\pi t), bt)$ pour $a, b > 0$.

1. Calculer le vecteur tangent $\vec{v}$ à chaque point de la courbe et en particulier au point $(a, 0, b)$.
2. Determiner la longeur de la courbe $L := \int_\gamma \mathrm{d}s$ entre $(a, 0, 0)$ et $(a, 0, b)$. (Alors, $L = \int_0^1 ||\vec{v}(t)||\mathrm{d}t$.)

Considerons ensuite la courbe $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (a\cos(2\pi t^3), a\sin(2\pi t^3), bt^3)$ pour $a, b > 0$.
Repondre aux même questions 1. et 2. Que observez-vous ?
Trouver un nouveau paramètre $s$ pour la courbe $\gamma$ tel que $s$ est la longeur de la courbe avec $\gamma|_{s=0} = (a, 0, 0)$ et $\frac{\mathrm{d}\gamma_z}{\mathrm{d}s} > 0$.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2$. Calculer $\int_\gamma f\mathrm{d}s$ entre le point $(a, 0, 0)$ et $(a, 0, b)$. Finalement, supposons que $f$ est la température et on s'interesse à la température moyenne $\bar{f}$ de la courbe entre $(a, 0, 0)$ et $(a, 0, b)$. Déterminer $\bar{f}$.

**Exercice 2.**
Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) := \left(-\frac{4}{3}t^3 + t - 2, 2t^2 + 7\right)$.

**Exercice 3.**
Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par
$\gamma(t) := (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$.

**Exercice 4.**
Pour $x \in [0, 1]$, calculer la longueur de la courbe $y := x^{3/2}$.

**Exercice 5.**
Soit $\Gamma$ une courbe paramétrée par $\varrho := \varrho(t)$ et $\theta := \theta(t)$ en coordonnées polaires, où $t \in [a; b]$.

1. Montrer que la longueur de $\Gamma$ est
$$\int_a^b \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2\theta'^2}\mathrm{d}t.$$
2. Soit $\gamma$ la courbe d'équation polaire $\varrho := 2(1 + \cos\theta)$ pour $\theta$ dans $[-\pi; \pi]$. Donner une paramétrisation en coordonnées polaires de cette courbe et calculer sa longueur.

## Surfaces et intégrales de surfaces

**Rappel 0 :** *Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour des valeurs génériques du $c \in \mathbb{R}$, $S := \{\vec{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, z) = c\}$ est une surface immersée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et $\vec{grad}F|\vec{x}$ est orthogonal à $S$ pour tout $\vec{x} \in S$. (Pour une surface $S$ paramétrisée cf. aussi Rappel 1.)*

**Exercice 6.**
*Trouver les équations du plan tangent et de la normale à la surface donnée au point indiqué :*

1. *surface $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$, au point $(2, 1, 3)$;*
2. *surface $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$, au point $(1, -2, 1)$.*

**Exercice 7.**

*Montrer que les surfaces définies par les équations* $x^2+4y^2-4z^2-4=0$ *et* $x^2+y^2+z^2-6x-6y+2z+10=0$ *sont tangentes au point* $(2,1,1)$.

**Exercice 8.**

*Montrer que les surfaces définies par les équations* $xy+yz-4zx=0$ *et* $3z^2-5x+y=0$ *se coupe en angle droit au point* $(1,2,1)$.

***Rappel 1 :****Soit* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \ (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$ *une fonction à valeurs réelles et* $S$ *une surface donnée par une fonction vectorielle* $\mathbf{r}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\,\mathbf{i}+y(u,v)\,\mathbf{j}+z(u,v)\,\mathbf{k},$$

*avec les coordonnées* $(u,v)$ *qui parcourent* $D(u,v)$, *le domaine de définition de la fonction* $r$ *dans le plan* $R^2$. *La fonction* $f(x,y,z)$ *est considerée seulement dans les points de la surface* $S$, *à savoir,*

$$f[\mathbf{r}(u,v)]=f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)].$$

*L'intégrale de surface d'une fonction* $f(x,y,z)$ *sur la surface* $S$ *est définie comme suit :*

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_{D(u,v)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv,$$

*où les derivées partielles* $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ *sont*

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\mathbf{k},\quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\,\mathbf{k}.$$

*On considère le produit vectoriel* $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$. *Le vecteur* $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ *est orthogonal à la surface dans le point* $\mathbf{r}(u,v)$.
*La valeur absolue* $dS=\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv$ *est appelé élément de surface.*
*L'aire d'une surface* $S$ *est donné par une intégrale de surface* $A=\iint_S dS$.
*Si la surface est donnée par une équation* $z=z(x,y)$, *où* $z(x,y)$ *est une fonction* $C^1$ *sur un domaine* $D(x,y)$, *l'intégrale de surface est donnée par*

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_{D(x,y)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

**Exercice 9.**

*Soit* $S$ *la surface paramétrée par l'application :*

$$f:(u,v)\in X\mapsto(u,v,uv),$$

*où* $X$ *est le disque unité de* $\mathbb{R}^2$.

1. *Dessiner grossièrement* $S$.
2. *Donner sous forme d'une intégrale sur* $X$ *l'aire de la surface de* $S$, $A:=\iint_S \mathrm{d}S$.
3. *En utilisant les coordonnées polaires, calculer cette intégrale.*

*Soit* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto z-x^2$.

1. *Calculer* $\iint_S f\mathrm{d}S$.
2. *Supposons que* $f$ *est la température sur l'espace* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer sa moyenne* $\bar{f}$ *sur la selle* $S$.

**Exercice 10.**

*Calculer l'intégrale* $\iint_S (x+y+z)\,dS$, *où* $S$ *est une partie du plan* $x+2y+4z=4$, *telle que* $(x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0)$.

**Exercice 11.**

*Calculer l'intégrale* $\iint\limits_S z^2 dS$, *où* $S$ *est une surface d'un cône* $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$.

**Exercice 12.**

*Calculer l'intégrale* $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\, dS$, *où* $S$ *est une partie d'un cône* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *satisfaisant* $x^2+y^2 \le 2ax$.

**Exercice 13.**

*Trouver l'intégrale* $\iint\limits_S x dS$, *où la surface* $S$ *est une partie de la sphère* $x^2+y^2+z^2 = a^2$, *telle que* $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

## Intégration dans la presence d'un champ de vecteur

***Rappel 2 :*** *Soit* $S$ *une surface paramétrée, orientée par le vecteur normal* $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$. *Soit* $\mathbf{n}(x,y,z)$ *le vecteur normal unitaire au point* $(x,y,z) \in S$, *donné par* $\mathbf{n}(x,y,z) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{v}} \Big/ \left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{v}} \right\|$.
*Alors*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} dS = \iint\limits_{D(u,v)} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] dudv;$$

*Une autre possibilité est d'orienter* $S$ *par par le vecteur normal* $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{v}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$. *Avec cette orientation, nous avons*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{D(u,v)} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right] dudv.$$

*La quantité* $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ *est appelée l'élément vectoriel de la surface. Le point* $\cdot$ *signifie le produit scalaire.*
*Si la surface* $S$ *est donnée par une équation* $z = z(x,y)$, *où* $z(x,y)$ *où* $z$ *est une fonction* $C^1$ *sur* $D(x,y)$, *alors l'intégrale de* $\mathbf{F}$ *sur* $S$ *est donnée par une des formules suivantes.*
*Si* $S$ *est oriéntée par* $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{x}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{y}}$, *alors*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} dS = \iint\limits_{D(x,y)} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \left( -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dxdy;$$

*Si* $S$ *est oriéntée par* $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{y}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{x}}$, *alors*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} dS = \iint\limits_{D(x,y)} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dxdy.$$

*En coordonnées cela se resume comme suit. Si* $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ *soit la normale à la surface* $S$ : $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *alors le produit scalaire* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ *est égale à*

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \cdot \mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma.$$

*L'intégrale de surface alors*

$$\iint\limits_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

*Puisque* $\cos\alpha \cdot dS = dydz$ *et aussi* $\cos\beta \cdot dS = dzdx$, $\cos\gamma \cdot dS = dxdy$, *on a la formule suivante :*

$$\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

*Si la surface* $S$ *est donné par* $\mathbf{r}\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right)$, *la dernière formule devient alors*

$$\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{D(u,v)} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv,$$

*où* $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

**Exercice 14.**
*Calculer l'intégrale du champs* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,-1,z)$ *sur l'intérieur de la surface* $S$, *donnée par l'équation* $z = x\cos y$, *où* $0 \le x \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{3}$.

**Exercice 15.**
*Trouver l'intégrale* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,x,z)$ *sur la surface* $S$, *donnée par*
$\mathbf{r}(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$, $0 \le u \le 2$, $\frac{\pi}{2} \le v \le \pi$.

**Exercice 16.**
*Trouver le flux du champs de vecteurs* $\mathbf{F} = y\cdot\mathbf{i} - x\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$ *à travers de la surface conique exterieure* $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$.

**Exercice 17.**
*Trouver le flux du champs de vecteurs*
$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\cdot\mathbf{i} + x\cdot\mathbf{j} - z\cdot\mathbf{k}$ *à travers de la sphère unitaire orientée à l'interieur* $x^2+y^2+z^2 = 1$.

**Exercice 18.**
*Calculer l'intégrale* $\iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$, *où* $S$ *est une partie interieure de l'ellipsoïde, donnée paramétriquement comme suit* $\mathbf{r}(u,v) = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$. *Les paramètres* $u, v$ *changes dans les intervales* $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

## Théorème d'Ostrogradski-Gauss

*Soit $G$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ borné par une surface fermée $S$. Soit*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

*un champs de vecteurs de classe $C^1$. La formule d'Ostrogradski-Gauss (aussi appelé la formule de divergence) donne un lien entre l'intégrale triple sur $D$ et l'intégrale de surface sur $S$ :*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_G (\nabla\cdot\mathbf{F})\, dV, \text{ où } \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

*est la divergence du champs de vecteurs div$\mathbf{F}$. Cette formule pour les formes différentielles se reécrit*

$$\iint\limits_S P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

*Dans le cas particulier quand $P = x$, $Q = y$, $R = z$, on trouve la formule pour le volume de $G$ en tant que l'intégrale de surface qui l'entoure $S$ :*

$$Vol(G) = \frac{1}{3}\left|\iint\limits_S x dydz + y dxdz + z dxdy\right|.$$

**Exercice 19.**
*Calucler l'intégrale de surface $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, où $S$ est une surface de sphère de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orienté à l'exterieur.*

**Exercice 20.**
*À l'aide du théorème d'Ostrogradski-Gauss calculer l'intégrale $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, où $S$ est une surface entourant le cylindre $x^2 + y^2 \le a^2$ entre les deux plans $z = -1$, et $z = 1$.*

**Exercice 21.**
*À l'aide du théorème d'Ostrogradski-Gauss calculer l'intégrale de surface $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$, où $S$ est une surface entourant le domaine borné par $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ et $z = 1$.*

**Exercice 22.**
*Calculer l'intégrale de surface $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, 8xz, 4yz)$, où $S$ est une surface de tetrahedron de sommets $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.*

**Exercice 23.**
*Calculer l'intégrale de surface $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^2y, xz^2, 4yz)$, où $S$ est une surface de parallélépipède formé par le domaine entre les plans déquations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$.*

## Théorème (spéciale) de Stokes

*Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un esurface et $C$ - une courbe, qui est son bord. Alors pour tout champs de vecteurs $\mathbf{F}$ de classe $C^1$ : $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ on a le théorème de Stokes (appellé aussi le théorème du rotationnel) qui relie l'integrale de surface sur l'intégrale curviligne*

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S},$$

*où*

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

*le rotationnel du champs* $\mathbf{F}$. *Le cercle autour de l'intégrale* $\oint$ *indique que l'intégrale est prise sur un circuit fermé. En utilisant les formes différentielles le théorème de Stokes est reécrit comme suit*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

**Exercice 24.**

*Montrer que l'intégrale curviligne* $\oint_C yzdx + xzdy + xydz$ *est égale à* $0$ *lelong tout le circuit fermé* $C$.

**Exercice 25.**

*Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne* $\oint_C (y+2z)\,dx + (x+2z)\,dy + (x+2y)\,dz$, *où la courbe* $C = S \bigcap P$ *où* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ *et* $P$ *est le plan* $x + 2y + 2z = 0$.

**Exercice 26.**

*Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne* $\oint_C y^3\,dx - x^3\,dy + z^3\,dz$. *La courbe* $C$ *est l'intersection du cylindre* $x^2 + y^2 = a^2$ *et le plan* $x + y + z = b$.

**Exercice 27.**

*Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne* $\oint_C (x+z)\,dx + (x-y)\,dy + x\,dz$, *où la courbe* $C$ *est une ellipse d'équation* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *dans le plan* $z = 1$.

**Exercice 28.**

*Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne* $\oint_C (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (y-x)\,dz$. *La courbe* $C$ *est un triangle de sommets* $A\,(2,0,0)\,,\ B\,(0,2,0)\,,\ D\,(0,0,2)$.

**Exercice 29.**

*Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne* $\oint_C \left(z^2 - y^2\right) dx + \left(x^2 - z^2\right) dy + \left(y^2 - x^2\right) dz$. *La courbe* $C$ *est l'intersection du paraboloïde de l'équation* $z = 5 - x^2 - y^2$ *et du plan de l'équation* $x + y + z = 1$.

**Exercice 30.**

*Montrer que le volume d'ellipsoïde* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ *est égale à* $\dfrac{4\pi abc}{3}$.