Contrôle continu # 3

– le 14 décembre 2016. Durée 60 minutes. Documents et calculatrices interdits –

Exercice 1. (13+2* p.)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq -1 \text{ et } 0 \leq x \leq 2y+8\}$ et
$f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto -\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2y(x-2)$.

1. (3 p.) Dessiner la région D et determiner les coins du bord ∂D.

2. (2 p.) Donner l'argument qui assure que f a une (ou plusieurs) valeur(s) de maximum et de minimum (sur son domaine de définition D).

3. (8 p.) Déterminer tous les points (x_{max}, y_{max}) et (x_{min}, y_{min}) dans D où f prend ses valeurs maximales et minimales, respectivement.

(Si vous utilisez la méthode de KKT pour la question **3** :
2 points de BONUS accordés.)

Exercice 2. (7+6* p.)

On considère des parallélépipèdes rectangles avec longeurs de côtés $a \geq b \geq c > 0$. Nous nous intéressons aux valeurs extremales de la surface $A = 2(ab+ac+bc)$ d'un tel parallélépipède quand le volume $V = abc$ est fixé.

1. (7 p.) Déterminer la fonction de Lagrange du problème et montrer que $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ est le seul point d'extremum local.

2. (6*p.) Montrer que ce point est un mimimum global et qu'il n'y a pas de maximum dans ce problème. (Cette question est du **BONUS**).