Chapitre 6

Méthodes fonctionnelles pour Δ, L et $\Box$

Théorie spectrale du Laplacien

Dans cette partie, on considère $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ borné. On munit $H_0^1(\Omega)$ (avec Ω borné) du produit scalaire

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \tag{6.1}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (Proposition 9.13), la norme

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \tag{6.2}$$

associée au produit scalaire de (6.1) est équivalente à la norme standard.

6.1 Proposition.
Hypothèse. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.*
Conclusions.

1. $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *est un isomorphisme d'espaces de Banach.*
2. *En particulier, il existe* $C_1(\Omega), C_2(\Omega) > 0$ *tels que*

$$C_1(\Omega)\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|(-\Delta)^{-1}T\|_{H_0^1} \le C_2(\Omega)\|T\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall\, T \in H^{-1}(\Omega). \tag{6.3}$$

3. *Pour* $T \in H^{-1}(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, *on a*

$$(-\Delta)^{-1}(T) = u \iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = T(v),\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.4}$$

4. *Pour* $T \in H^{-1}(\Omega)$, $u := (-\Delta)^{-1}(T)$ *est l'unique solution du problème de minimisation*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - T(v)\,;\, v \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

$-\Delta$ étant linéaire bijective, on peut transporter le du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$ vers $H^{-1}(\Omega)$ par la formule

$$(T,U)_{H^{-1}} = ((-\Delta)^{-1}T, (-\Delta)^{-1}U)_{H_0^1}.$$

6.2 Proposition. *La norme induite par le produit scalaire ci-dessus, $T \mapsto (T,T)^{1/2}_{H^{-1}}$, est égale à la norme de T comme élément de $[H^1_0(\Omega)]^*$, lorsque $H^1_0(\Omega)$ est muni de la norme (6.2).*

Démonstration. Soit $u = (-\Delta)^{-1}(T)$, de sorte que $\|T\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^1_0}$.

On a

$$\|T\|_{[H^1_0(\Omega)]^*} = \sup\left\{T(v)\,;\, v \in H^1_0(\Omega), \|v\|_{H^1_0} \le 1\right\} \overset{(a)}{=} \sup\left\{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,;\, v \in H^1_0(\Omega), \|v\|_{H^1_0} \le 1\right\}$$
$$= \sup\left\{(u,v)_{H^1_0}\,;\, v \in H^1_0(\Omega), \|v\|_{H^1_0} \le 1\right\} \overset{(b)}{=} \|u\|_{H^1_0} = \|T\|_{H^{-1}}.$$

Ici :

(a) suit de (6.4).

(b) est une conséquence de l'égalité

$$\|x\| = \sup\{(x,y)\,;\, \|y\| \le 1\}$$

valable pour toute norme $\| \ \|$ induite par le produit scalaire $(\ ,\ )$. $\Box$

6.3 Proposition.
Hypothèse. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.*
Conclusions. *L'opérateur $(-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ induit un opérateur $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, qui est :*

1. *Compact.*
2. *Auto-adjoint.*
3. *Positif.*

6.4 Théorème.
Hypothèse. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.*
Conclusions. *Il existe une suite $(e_j)_{j\ge 1} \subset H^1_0(\Omega)$ et une suite $(\lambda_j) \subset (0,+\infty)$ telles que*

1. $-\Delta e_j = \lambda_j e_j$, $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$.
2. $\lambda_j \nearrow \infty$.
3. (e_j) *est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.*
4. $\left(\dfrac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)$ *est une base hilbertienne de $H^1_0(\Omega)$.*
5. $\left(\sqrt{\lambda_j}e_j\right)$ *est une base hilbertienne de $H^{-1}(\Omega)$.*
6. *Si $u \in H^1_0(\Omega)$, alors on a $u = \sum (u,e_j)_{L^2} e_j$ (série convergente dans $L^2(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$) et*
$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \sum \lambda_j \left|(u,e_j)_{L^2}\right|^2.$$
7. *Si $T \in H^{-1}(\Omega)$, alors on a $T = \sum T(e_j)e_j$ (série convergente dans $H^{-1}(\Omega)$) et*
$$\|T\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sum \frac{|T(e_j)|^2}{\lambda_j}.$$
8. *Si $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de $-\Delta u = f$ est donnée par $u = \sum \dfrac{(f,e_j)_{L^2}}{\lambda_j} e_j$.*
9. *Si $T \in H^{-1}(\Omega)$, alors la solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de $-\Delta u = T$ est donnée par $u = \sum \dfrac{T(e_j)}{\lambda_j} e_j$.*

Ce dernier théorème nous permet de trouver une solution généralisée du problème classique de Dirichlet (2.10). Si u est solution classique, alors $u \in H^1(\Omega)$ et tr $u = g$ (Exercice 9.63). Ainsi, la solution u donnée par le résultat suivant peut être vue comme une solution généralisée de (2.10).

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = T & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{6.5}$$

6.5 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *Lipschitz borné.* $T \in H^{-1}(\Omega)$. $g \in H^{1/2}(\Omega)$.
Conclusions.

1. *Le problème* (6.5) *a, dans l'espace* $H^1(\Omega)$*, une solution généralisée* u *et une seule. Cet* u *vérifie* (6.5) *au sens suivant :*
   a. $-\Delta u = T$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$.
   b. $\operatorname{tr} u = g$.
2. *L'application*
$$H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \ni (T, g) \mapsto u \in H^1(\Omega)$$
est un isomorphisme d'espaces de Banach. En particulier, on a
$$\|u\|_{H^1} \sim \|T\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^{1/2}}.$$
3. *La solution* u *de* (6.5) *est la (seule) solution du problème de minimisation*
$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - T(v)\,;\, v \in H^1(\Omega), \operatorname{tr} u = g\right\}.$$

6.6 Remarque. On a retrouvé le principe de Dirichlet (Proposition 2.11)!

6.7 Proposition. *Les fonctions propres du Laplacien sont dans* $C^\infty(\Omega)$.

Résolution de L et $\Box$ par séparation des variables

Nous allons considérer uniquement le cas du problème de Dirichlet avec donnée nulle au bord. Le cas d'une donnée au bord non nulle peut être traité comme dans la section précédente.

Dans l'esprit de la section précédente, nous allons chercher des solutions généralisées.

On considère d'abord le problème "de Cauchy" pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans } \Omega_T \\ u_{|t=0} = U & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_T. \end{cases} \tag{6.6}$$

6.8 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.* $U \in H^{-1}(\Omega)$. $F \in L^2(\Omega_T)$. *On pose*

$$u(\cdot, t) = \sum_j \left(U(e_j) e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{\lambda_j(s-t)} F_j(s)\, ds \right) e_j.$$

Ici, $F_j(t) = \big(F(\cdot, t), e_j\big)_{L^2}$.
Conclusions. u *est solution de* (6.6) *au sens suivant :*

1. *$Lu = F$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_T)$.*
2. *On a $u \in C((0,T]; H^1_0(\Omega))$. (D'où $tr\, u(\cdot,t) = 0$, $\forall\, t > 0$.)*
3. *On a $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot,t) = U$ dans $H^{-1}(\Omega)$.*

La solution u est uniquement déterminée par les propriétés 1-3.

Démonstration. On considère, par exemple, le cas où $F = 0$ et U quelconque ; le cas symétrique où F est quelconque et $U = 0$ se traite de manière analogue, et le cas général s'obtient en combinant ces deux cas particuliers. On considère donc

$$u(\cdot,t) = \sum_j U(e_j) e^{-\lambda_j t} e_j. \tag{6.7}$$

Étape 1. On a $u \in C((0,T]; H^1_0(\Omega))$.
On repose sur l'Exercice 6.11 appliqué sur $I = (\varepsilon, T]$, avec $u_j \in C((0,T];\mathbb{C})$, $u_j(t) = U(e_j)e^{-\lambda_j t}$. On a

$$|u_j(t)| \le a_j = |U(e_j)| e^{-\lambda_j \varepsilon}$$

et (en utilisant le Théorème 6.4 *7*)

$$\sum \lambda_j a_j^2 = \sum \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j \varepsilon} \frac{|U(e_j)|^2}{\lambda_j} = \sup_j \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j \varepsilon} \|U\|^2_{H^{-1}} \le C \|U\|^2_{H^{-1}},$$

où

$$C = \sup_j \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j \varepsilon} = \sup_j \frac{\lambda_j^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2} e^{-2\lambda_j \varepsilon} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_{t>0} t^2 e^{-2t} < \infty.$$

Étape 2. On a $u \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)$ et $u(\cdot,0) = U$.
L'égalité $u(\cdot,0) = U$ suit du Théorème 6.4 *7*. La continuité par rapport à t s'établit comme dans l'étape précédente, à partir de

$$|u_j(t)| \le a_j = |U(e_j)|$$

et

$$\sum \frac{a_j^2}{\lambda_j} = \sum \frac{U(e_j)^2}{\lambda_j} = \|U\|^2_{H^{-1}}.$$

Étape 3. u vérifie $Lu = 0$: un cas particulier.
On va montrer que chaque terme $v_j = u_j e_j$ de la somme (6.7) vérifie $Lv_j = 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_T)$. Soit $\varphi \in C^\infty_c(\Omega_T)$. En utilisant $u_j \in C([0,T];\mathbb{C})$ et $e_j \in L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
Lv_j(\varphi) = v_j(-\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi) &= -\int u_j(t) \partial_t \varphi(x,t) e_j(x)\, dx dt - \int u_j(t) e_j(x) \Delta_x \varphi(x,t)\, dx dt \\
&= -\int u_j(t) \partial_t \varphi(x,t) e_j(x)\, dx dt + \int u_j(t) \nabla e_j(x) \cdot \nabla_x \varphi(x,t)\, dx dt \\
&= -\int u_j(t) \partial_t \varphi(x,t) e_j(x)\, dx dt + \lambda_j \int u_j(t) e_j(x) \varphi(x,t)\, dx dt \\
&= \int \left(\int (-u_j(t) \partial_t \varphi(x,t) + \lambda_j u_j(t) \varphi(x,t)\, dt \right) dx \\
&= -\int \left(\int (u_j(t) \partial_t \varphi(x,t) + u_j'(t) \varphi(x,t))\, dt \right) dx \\
&= -\int \left(\int \partial_t (u_j \varphi)\, dt \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Étape 4. u vérifie $Lu = 0$.
Soit $u^N = \sum_{j\le N} v_j$. En utilisant le Théorème 6.4 *7*, on obtient

$$\|u^N - u\|^2_{L^2(\Omega_T)} = \int_0^T \|u^N(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \sum_{j>N} |v_j(t)|^2\,dt$$
$$\le \sum_{j>N} |U(e_j)|^2 \int_0^\infty e^{-2\lambda_j t}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{j>N}\frac{|U(e_j)|^2}{\lambda_j} \to 0 \text{ quand } N\to\infty.$$

Donc $u^N \to u$ dans $L^2(\Omega_T)$, d'où $u^N \to u$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_T)$. Comme (par l'étape précédente) on a $Lu^N = 0$, on trouve $Lu = 0$.
Étape 5. Unicité. On doit montrer que, si u satisfait *1-3* avec $U = 0$ et $F = 0$, alors $u = 0$. On note d'abord que

$$u \in C((0,T];H^1_0(\Omega)) \hookrightarrow C((0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2_{loc}((0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2_{loc}(\Omega_T).$$

Soit $u_j(t) = (u(\cdot,t),e_j)_{L^2}$, de sorte que $u_j \in C((0,T];\mathbb{C})$. [1] L'égalité $u = 0$ revient à $u_j = 0$, $\forall j$. Soient $\zeta \in C^\infty_c((0,T))$, $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$ et

$$\varphi(x,t) = \zeta(t)\psi(x),\ \forall (x,t)\in\Omega_T.$$

En reprenant le calcul de l'étape *3*, on trouve

$$0 = Lu(\varphi) = u(-\partial_t\varphi - \Delta_x\varphi) = \int (-u(x,t)\zeta'(t)\psi(x) + \zeta(t)\nabla_x u(x,t)\cdot\nabla\psi(x))\,dxdt. \tag{6.8}$$

En notant que l'intégrande dans (6.8) est majorée comme suit

$$\left|(-u(x,t)\zeta'(t)\psi(x) + \zeta(t)\nabla_x u(x,t)\cdot\nabla\psi(x))\right| \le \|\zeta'\|_{L^\infty} \max_{t\in\operatorname{supp}\zeta}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$$
$$+ \|\zeta\|_{L^\infty}\max_{t\in\operatorname{supp}\zeta}\|\nabla_x u(\cdot,t)\|_{L^2}\|\nabla\psi\|_{L^2},$$

on obtient que la dernière intégrale dans (6.8) est continue, en tant que fonction de ψ, pour la norme de $H^1(\Omega)$. Par densité de $C^\infty_c(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$, on trouve que (6.8) reste vraie pour $\zeta \in C^\infty_c((0,T))$ et $\psi \in H^1_0(\Omega)$. En particulier, pour $\psi = e_j$, on trouve

$$0 = \int (-u(x,t)\zeta'(t)e_j(x) + \zeta(t)\nabla_x u(x,t)\cdot\nabla e_j(x))\,dxdt = \int (-u_j(t)\zeta'(t) + \lambda_j u_j(t)\zeta(t))\,dt,$$

ou encore $u_j' + \lambda_j u_j = 0$ dans $\mathscr{D}'((0,T))$. La continuité de u_j et l'Exercice 10.53 donne $u_j(t) = C_j e^{-\lambda_j t}$. Par ailleurs, *3* implique

$$0 = \lim_{t\searrow 0}[u(\cdot,t)](e_j) = \lim_{t\searrow 0} u_j(t) = 0,$$

d'où $C_j = 0$, ou encore $u_j = 0$. □

On considère ensuite le problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} \Box u = F & \text{dans } \Omega_T \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \Omega \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}. \tag{6.9}$$

1. En effet, $(0,T] \ni t \mapsto u(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ est continue, car $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. On utilise ensuite la continuité du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

6.9 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.* $f \in H_0^1(\Omega)$. $g \in L^2(\Omega)$. $F \in L^2(\Omega_T)$. *On pose*

$$u(\cdot,t) = \sum_j \left(\cos(\sqrt{\lambda_j} t)(f,e_j)_{L^2} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} t)}{\sqrt{\lambda_j}}(g,e_j)_{L^2}\, e_j + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t F_j(s) \sin\left(\sqrt{\lambda_j}(t-s)\right) ds \right) e_j.$$

Ici, $F_j(t) = \big(F(\cdot,t), e_j\big)_{L^2}$.
Conclusions. u *est solution de* (6.9) *au sens suivant :*

1. $\square u = F$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega_T)$.
2. *On a* $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. *(D'où* $tr\ u(\cdot,t) = 0$, $\forall\, t > 0$.*)*
3. *On a* $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot,t) = f$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.
4. *On a* $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$.
5. *On a* $\lim_{t \searrow 0} u_t(\cdot,t) = g$ *dans* $L^2(\Omega)$.

La solution u *est uniquement déterminée par les propriétés 1-5.*

6.10 Remarque. Dans les théorèmes 6.8 et 6.9, la régularité de u dépend de celle des données f, g et F du problème. Pour des énoncés similaires sous d'autres hypothèses de régularité, voir par exemple [3, Chapter 10].

Exercices

6.11 Exercice. * Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit (a_j) une suite de nombre réels. Soit $(u_j) \subset C(I;\mathbb{C})$ une suite telle que $|u_j(t)| \le a_j$, $\forall\, j, \forall\, t$. On pose, du moins formellement,

$$u(\cdot,t) = \sum_j u_j(t) e_j.$$

1. Si $\sum a_j^2 < \infty$, montrer que
   $I \ni t \mapsto u(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$

est continue.

2. Si $\sum \lambda_j a_j^2 < \infty$, montrer que
   $I \ni t \mapsto u(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega)$

est continue.

3. Si $\sum \dfrac{a_j^2}{\lambda_j} < \infty$, montrer que
   $I \ni t \mapsto u(\cdot,t) \in H^{-1}(\Omega)$

est continue.
Enoncer la variante locale[2] de ce résultat.

6.12 Exercice. * Soit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Montrer que

$$\sum \lambda_j^2 \left|(u,e_j)_{L^2}\right|^2 = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \le \|u\|_{H^2}^2 < \infty.$$

2. C'est-à-dire, lorsque la domination globale $|u_j(t)| \le a_j$ est remplacée par une domination sur les compacts.

6.13 Exercice. * Montrer que, dans le Théorème 6.8, l'unicité de u est vraie si l'hypothèse *2* est remplacée par l'hypothèse plus faible $u \in L^1_{loc}((0,T);H^1_0(\Omega))$.

6.14 Exercice. * On se place dans le cadre du Théorème 6.8. Montrer que, si $T \in L^2(\Omega)$ et $F \in L^2(\Omega_T)$, alors $\lim_{t\to 0} u(\cdot,t) = T$ dans $L^2(\Omega)$.

6.15 Exercice. * Enoncer et prouver un résultat sur la séparation des variables pour le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger.